

0 유클리드의 원론(과 그 기초)에 대해 어떤 관점에서 볼 것인지에 대해...

여기서의 관점은 대략 다음과 같습니다. 유클리드의 원론의 내용과 방법에 대해 가능한 그대로 받아들이면서도, 현재의 시점에서 본 몇 가지 보충들(예를 들어 유클리드가 사용했던 개념을 좀 더 명확히 명시하거나, 암묵적으로 사용했던 가정을 공리로 보충하거나 등등)을 포함해서 생각하려는 것입니다. 일단은 수학적 관점이면서, 과거의 수학이 어떠했는지를 좀 더 반영한 것이라고 생각하면 되겠습니다.(이는 수학사적 관점과 어느 정도 차이가 있을 수 있다는 의미입니다)

또한 Hartshorne의 *Geometry: Euclid and Beyond*라는 책이 있습니다. 이 책에서는 ‘유클리드의 원론의 내용에 대해 무엇을 보충하면, 유클리드의 원론에 제시된 정리들과 그 증명을 현재의 시점에서 거의 그대로 받아들일 수 있는가’를 비교적 상세하게 알려주고 있고, 이 글의 상당 부분은 그 책의 관점을 참조하였습니다.

에우클레이데스(유클리드)의 원론은 정의(Definition), 공준(Postulate), 공통 개념(Common Notion), 명제(Proposition)으로 이루어져 있고, 이 중 공준과 공통 개념은 1권에만 있다. 대략 말해 공준은 주어진 상황에서 우리가 무엇을 구성할 수 있는지에 대한 것이고, 대략 말해 공통 개념은 주어진 상황에서 우리가 무엇을 추론할 수 있는지에 대한 것이다. 또한 고대 그리스 수학에서 명제(Proposition)는 정리(Theorem)와 문제(Problem)으로 나뉘는데, 대략 말해 정리는 어떤 수학적 사실을 보이는 것이고, 대략 말해 문제는 어떤 수학적 대상을 구성하는 것이다.

유클리드가 기초 개념들에 대해 어떻게 생각하고 있었는지, 그리고 우리는 평면기하 및 여러 가지들의 기초 개념을 어떻게 생각할지에 대한 더 자세한 논의는 부록에서 일부 진행하기로 하고, 이제 유클리드의 원론 5권과 6권으로 들어가보자.

1 유클리드의 원론 5권의 몇몇 정의들, 1

1.1 정의 3

원론 5권의 정의 3은 다음과 같다.

V.def.3

(Acerbi¹) A ratio of two homogeneous magnitudes is a relation of a certain kind according to value.

우선, 크기(magnitude)라는 것이 등장하고 크기들에 여러 가지 종류가 있다고 말해진 것인데, 선분, 2차원 다각형, 3차원 다면체 등이 각각 종류라고 생각하면 되겠다. 또한 여기서의 크기들을 기하학적 대상을 수량화한 어떤 결과라기보다는, 기하학적 대상 자체라고 생각하는 게 좋겠다.

5권 전체에서, 각각의 종류마다, 그 종류의 크기들 사이의 같음 관계 및 대소관계가 있고, 또한 그 종류의 크기들에 대한 합침 연산과 덜어냄 연산이 주어져 있고, 이들은 여러 좋은 성질을 만족시킨다는 것이 미리 주어져 있다. 조금 더 명확히 쓰자. 특정 종류의 크기들의 모임을 M 이라고 하자. 그러면 M 에는 같음 관계 $\sim$, 합 연산 $+$ 이 주어져 있고 이에 대해 다음이 성립한다.(이하의 a, b, c 등등은 모두 M 에 속하는 것들이다)

(1) 합동인 것들은 서로 같다.(여기서 크기들은 각각 자기 자신과 합동이라고 하자.)

(2) 또한, 동일한 것과 같은 것들은 그것들끼리 서로 같다.(공통 개념 1) 즉,

$$a \sim b \text{이고 } a \sim c \text{ 인 } b \text{와 } c \text{에 대해, } b \sim c$$

$$b \sim a \text{이고 } c \sim a \text{ 인 } b \text{와 } c \text{에 대해, } b \sim c$$

$$(3) (a + b) + c \sim a + (b + c)$$

$$(4) a + b \sim b + a$$

(5)

$$a \sim a' \text{이고 } b \sim b' \text{ 이면 } a + b \sim a' + b' \text{ (공통 개념 2)}$$

$$a + b \sim a' + b' \text{ 이고 } a \sim a' \text{ 이면 } b \sim b' \text{ (공통 개념 3)}$$

(6) a, b 에 대해, 정확히 다음 셋 중 하나이다.

$$(6-1) \text{ 어떤 } c \text{에 대해 } a + c \sim b \text{ 이다.}$$

¹Acerbi, F. (2021). *The logical syntax of Greek mathematics*. Cham: Springer.

$$(6-2) a \sim b$$

(6-3) 어떤 c 에 대해 $b + c \sim a$ 이다.

(6) 위의 (5-1)의 경우에는 $a < b$ 라고, (5-3)의 경우에는 $b < a$ 라고 정의한다.

예를 들어, 선분의 경우에는 선분의 같음 관계는 선분의 합동이다. 선분 AB와 선분 CD에 대해, [선분 BE와 선분 CD가 합동이 되게 하는, 반직선 AB 위의 점 E]가 존재하고, 선분 AB와 선분 CD의 합은 선분 AE로 둘 수 있다. 현재의 시점에서는 이렇게 정의된 선분의 합에 대해 결합법칙, 교환법칙 등이 성립한다는 것을 확인해야 하겠지만, 유클리드는 그것을 따로 확인하지는 않았고 미리 잘 확립되어 있는 것으로 생각한 듯하다.

2차원 다각형의 경우에는 다각형의 같음 관계는 아래의

- (a) 합동인 2차원 도형은 서로 같다.
 - (b) 동일한 2차원 도형과 같은 2차원 도형들은 서로 같다.
 - (c) 2차원 도형 A와 B가 겹치는 부분이 없으면서(부연하자면 공통 부분이 2차원 미만이라는 의미에서) 합쳐진 것이 2차원 도형 C이고, 2차원 도형 A'와 B'가 겹치는 부분이 없으면서 합쳐진 것이 2차원 도형 C'이고, A는 A'와 같고 B는 B'와 같다고 하자. 그러면 C는 C'와 같다.
 - (d) 2차원 도형 A와 A'가 같고, A의 부분인 2차원 도형 B와 A'의 부분인 2차원 도형 B'가 같다고 하자. 그러면 A에서 B를 뺀 것과 A'에서 B'를 뺀 것이 서로 같다.
 - (e) 2차원 도형 A와 A'가 서로 같고, 2차원 도형 B를 그것과 같은 2차원 도형과 겹치는 부분이 없으면서 합친 것이 A이고, 2차원 도형 B'를 그것과 같은 2차원 도형과 겹치는 부분이 없으면서 합친 것이 A'이라고 하자. 그러면 B는 B'와 같다.
 - (f) 2차원 도형 B가 2차원 도형 A의 진부분이라고 하자. 그러면 A와 B는 같지 않다.
- (공통 개념 5)

를 만족시키는 어떤 것이고², 합 연산 +은 위의 (c)에서 말해진 그것이다. 또한 이로부터 다각형 A와 B에 대해 $A < A + B$ 라는 것을 이끌어낼 수 있는데, 이것을 “전체는 부분보다 크다”라고 말하는 **공통 개념 5**의 내용으로도 이해할 수 있다.

²이 부분은 대체로 Hartshorne의 *Geometry: Euclid and Beyond*의 논의 방식을 따랐다. 넓이 개념이 주어져 있다면, ‘2차원 도형 A와 B에 대해 A의 넓이와 B의 넓이가 일치하면 A와 B는 서로 같다’와 같은 정의를 줄 수도 있다. 한편 Hartshorne이 *Geometry: Euclid and Beyond*에서 보였듯이, 2차원 다각형에 한정했을 때 (a)~(f)를 만족하는 관계가 존재한다는 것은 적어도 실수의 개념을 사용하지 않고도 보여진다.

1.2 정의 1, 2

정의 1과 2를 직접 언급하지는 않겠다. 대신 그곳에서 말하는 바는, 우리에게 크기 a 의 2배, 3배, 4배, 등등의 개념이 주어져 있다는 것이다. 원론 5권의 몇몇 명제의 증명으로 보아, 내가 이해하기로는, 그것은 다음과 같은 개념으로 보인다.

크기 a 가 있고, 자연수 α 가 있다고 하자. 그러면 b 가 a 의 α 배라는 것은 다음과 같다.

$$a \sim a_1, \dots, a \sim a_\alpha \text{ 인 } a_1, \dots, a_\alpha \text{가 존재하고 } b \text{가 } a_1 + \dots + a_\alpha \text{이다.}$$

이는 5권 명제 1에서 실제로 증명한 것이 다음과 같았기 때문이다.

크기 a 와 b 가 있고, 또한 크기 c 와 d 가 있고, c 와 d 는 각각 a 와 b 의 2배라고 하자.(이는, c 는 $a_1 + a_2$ 이고 d 는 $b_1 + b_2$ 이고 $a \sim a_1 \sim a_2$ 이고 $b \sim b_1 \sim b_2$ 라는 것이다) 그러면 $c + d$ 도 $a + b$ 의 2배이다.

이와 같은 접근은 어쩌면 크기들의 $\sim$ 에 대한 동등류(equivalence class)가 아닌 크기들 자체에 대해 논하고 있어서일 수 있다. 유클리드의 원론의 방식을 따라 따로 동등류를 생각하지 않은 채로 진행할 수도 있지만, 여기서부터는 다른 것들은 그대로 두는 대신 크기들의 $\sim$ 에 대한 동등류를 사용하는 방식으로 진행하기로 하자.

따라서 $\sim$, $<$ 대신 $=$, $<$ 를 사용할 수 있고, 이하에서 ‘선분 AB와 합동인 선분들의 모임’을 그냥 ‘선분 AB’라고 쓰겠다.(또는, 시점과 종점이 다른 두 벡터가 평행이동하여 포개질 수 있으면 동일한 벡터로 생각하는 경우처럼, 서로 다른 위치에 있는 두 선분이 강체이동하여 포개질 수 있으면 그 선분들을 동일시하겠다, 라고 생각해도 좋다. 이와 같이, 이하에서 별다른 명시 없이 그냥 ‘크기’라고 할 때는 더 정확히는 ‘크기들의 동등류’를 가리키는 것이다.) 이제 a 의 2배, 3배, $\dots$ 를 $2a = a + a$, $3a = a + a + a$, $\dots$ 로 이해해도 무방하다.

1.3 정의 3, 다시. 그리고 정의 4

이제 원론 5권의 정의 3에서 살펴보지 않았던 것들을 살펴보자.

V.def.3

(Acerbi³) A ratio of two homogeneous magnitudes is a relation of a certain kind according to value.

³Acerbi, F. (2021). *The logical syntax of Greek mathematics*. Cham: Springer.

여기서 비율(ratio)은 동일한 종류에 속하는 두 크기가 갖는 관계(‘두 크기들에 대한 조건’이라는 번역도 제안되었다)라고 말하고 있다. 이에 대해, 예를 들어, a 와 b 는 동일한 종류의 크기이고 b 가 a 의 3배라고 하자. 이것을 (a, b) 가 ‘ y 는 x 의 3배’라는 관계 또는 조건을 만족시킨다고 생각할 수 있을 것이다. 또한 d 역시 c 의 3배라면, (c, d) 도 마찬가지로 ‘ y 는 x 의 3배’라는 관계 또는 조건을 만족시키고 있다. 이로부터 (a, b) 와 (c, d) 는 동일한 조건 ‘ y 는 x 의 3배’를 만족시킨다고 말할 수 있고, 그리스 수학에서 비례를 생각하는 것은 이와 같은 사고방식 또는 그 연장이라고 나는 이해하고 있다.

또한 여기서 (a, b) 가 ‘ y 는 x 의 3배’를 만족시키면, (a, b) 가 ‘ y 는 x 의 2배보다 크다’, ‘ y 의 2배는 x 의 7배보다 작다’ 등등 또한 만족시킨다는 것도 주목할 수 있다. 또 한편으로는 위 논의는 통약가능한 크기들(크기 a, b 가 통약가능하다는 것은 어떤 크기 c , 자연수 α, β 가 있어서 a 는 c 의 α 배이고 b 는 c 의 β 배라는 것이다)에 대해서만 적용되는 것은 아닌지 물을 수 있다. 통약가능한지와 불가능한지의 여부에 무관하게 공통으로 적용되는 ‘동일한 비율을 가짐’의 정의가 있을지 궁금해할 수 있고, 그러한 정의가 조금 뒤에 볼 정의 5이다.

한편, 만약 다음이 성립하는 두 선분 a, b 가 있다면 어떻게 될까?

a 는 b 보다 작고, a 의 2배는 b 보다 작고, a 의 3배는 b 보다 작고, ...

흔히 우리가 배워 온 기하학에서는 그런 선분이 존재하지 않는다. 그렇지만 위와 같은 선분 a, b 가 존재하는 기하학이 불가능하지는 않고, 정말로 그런 두 선분 a 와 b 가 존재한다고 해 보자. 그리고 c 는 a 의 2배라고 하면, 다음 또한 성립한다.

c 는 b 보다 작고, c 의 2배는 b 보다 작고, c 의 3배는 b 보다 작고, ...

이는 (a, b) 와 $(2a, b)$ 가 동일한 조건들을 만족시킨다는 것인데, 이로부터 ‘ a 와 b 의 비율은 $2a$ 와 b 의 비율과 동일하다’로 나아간다면 무언가 이상해 보일 수도 있겠다. 따라서, 유클리드의 원론 5권에서는 a 와 b 가 다음을 만족시키는 경우에 한해서만 a 와 b 의 비율을 생각하겠다고 선언했고, 그것이 정의 4의 내용이다.

a 가 b 보다 크거나, a 의 2배가 b 보다 크거나, a 의 3배가 b 보다 크거나, ...

b 가 a 보다 크거나, b 의 2배가 a 보다 크거나, b 의 3배는 a 보다 크거나, ...

이는 달리 말하면 아르키메데스 성질이 성립하는 영역 내에서 비율을 다루겠다는 것과 같다.(아르키메데스 성질은 그리스 수학자들이 ‘밑변과 높이가 같은 각뿔과 각기둥에 대해, 각뿔의 3배가 각기둥과 같다’를 증명할 때에도 사용했다.)

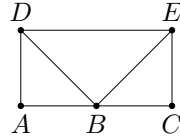
1.4 정의 5

이제 앞에서 예고한, 통약가능한지와 불가능한지의 여부에 무관하게 공통으로 적용되는 ‘동일한 비율을 가짐’의 정의를 소개하겠다. 그 정의는 다음과 같다.

V.def.5

(Acerbi⁴) Magnitudes are said to be in a same ratio, first to second and third to fourth, whenever the equimultiples of the first and third, according to whichever multiple, respectively, either exceed together or be equal together or fall short together of the equimultiples of the second and fourth, taken in corresponding order.

이것은 무엇을 말하는 것일까? 예를 들어, 직사각형 ACED가 있고, 선분 AC는 선분 AD의 2배이고, B는 AC의 중점이고, 선분 BD와 BE도 그려졌다고 하자. 즉 아래와 같다.



그리고 편의상 $a = \overline{DB}$, $b = \overline{AB}$, $c = \overline{DE}$, $d = \overline{BE}$ 라고 두자.(또는 $a = d = \sqrt{2}$, $b = 1$, $c = 2$ 라고 생각하여도...?) 그러면, 다음이 성립함을 확인할 수 있다.

$$\begin{array}{ll}
 a > b, 2a > b, 3a > b, 4a > b, \dots & c > d, 2c > d, 3c > d, 4c > d, \dots \\
 a < 2b, 2a > 2b, 3a > 2b, 4a > 2b, \dots & c < 2d, 2c > 2d, 3c > 2d, 4c > 2d, \dots \\
 a < 3b, 2a < 3b, 3a > 3b, 4a > 3b, \dots & c < 3d, 2c < 3d, 3c > 3d, 4c > 3d, \dots \\
 a < 4b, 2a < 4b, 3a > 4b, 4a > 4b, \dots & c < 4d, 2c < 4d, 3c > 4d, 4c > 4d, \dots \\
 \dots & \dots
 \end{array}$$

(a, b) 와 (c, d) 가 위와 같이 동일한 조건(들)을 만족시킬 때, a 가 b 에 대해 갖는 비율과 c 가 d 에 대해 갖는 비율이 동일하다는 것이 원론 5권 정의 5가 말하는 것이다.

1.4.1 정의를 만족시키는지 어떻게 확인할 수 있는지에 대해

여기서 무한히 많은 case들을 어떻게 확인하는지 물을 수 있겠다. 우선 a 와 b 에 대해, a 는 x 의 3배이고 b 는 x 의 2배라고 하자. 또한 c 와 d 에 대해, c 는 y 의 3배이고 d 는 y 의 2배라고 하자. 그러면

$$2a = 3b, 2c = 3d$$

⁴Acerbi, F. (2021). *The logical syntax of Greek mathematics*. Cham: Springer.

이고, 이로부터

$$\begin{array}{ll}
 2a > b & 2c > d \\
 2a > 2b & 2c > 2d \\
 a < 3b, 2a = 3b, 3a > 3b, 4a > 3b, \dots & c < 3d, 2c = 3d, 3c > 3d, 4c > 3d, \dots \\
 2a < 4b & 2c < 4d \\
 \dots & \dots
 \end{array}$$

이다. 그런데 $2a > 2b$ 이므로 $a > b$ 이고 따라서 $3a > b, 4a > b, \dots$ 이다. 또한 $2a < 4b$ 이므로 $a < 2b$ 이고, $3a > 2b, 4a > 2b, \dots$ 이다. 게다가 $6a = 9b$ 이므로 $6a > 8b, 3a > 4b, 4a > 4b, \dots$ 이다. 이는 c 와 d 에 대해서도 마찬가지이고, 결국 다음이 성립할 것이다.

$2a = 3b$ 로부터, 어떠한 자연수 α, β 를 가져오더라도, a 의 α 배가 b 의 β 배보다 큰지 같은지 작은지 원리상 확인가능하다.

따라서, 통약가능하고 각각 무엇이 무엇의 몇 배인지가 주어져 있는 경우에는 비율이 동일한지를 판단하는 데에 문제가 없다.

한편 위의 $a = \overline{DB}, b = \overline{AB}, c = \overline{DE}, d = \overline{BE}$ 와

$$\begin{array}{ll}
 a > b, 2a > b, 3a > b, 4a > b, \dots & c > d, 2c > d, 3c > d, 4c > d, \dots \\
 a < 2b, 2a > 2b, 3a > 2b, 4a > 2b, \dots & c < 2d, 2c > 2d, 3c > 2d, 4c > 2d, \dots \\
 a < 3b, 2a < 3b, 3a > 3b, 4a > 3b, \dots & c < 3d, 2c < 3d, 3c > 3d, 4c > 3d, \dots \\
 a < 4b, 2a < 4b, 3a > 4b, 4a > 4b, \dots & c < 4d, 2c < 4d, 3c > 4d, 4c > 4d, \dots \\
 \dots & \dots
 \end{array}$$

의 경우에는, 각 행에서 부등호의 방향이 바뀌는 곳만 알면 충분하다.(또는 각 열에서 부등호의 방향이 바뀌는 곳을 알면 충분하다.) 그리고 지금의 경우는 각각의 a, b, c, d 가 어떠한 기하학적 대상이였는지로부터 확인될 수 있고, 유클리드의 원론 6권에서 ‘등각삼각형은 닮음이다’, ‘닮은 삼각형에서 특정한 비율의 동일함이 성립한다’가 확보되면 더 빠르게 확인될 수 있다.

1.4.2 데데킨트의 실수 정의?

유클리드의 원론 5권 정의 5를 자세히 살펴보면, 다음과 같은 것을 생각할 수도 있겠다.

정의 동일한 종류의 크기 a, b 에 대해, $R(a, b)$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$R(a, b) = \left\{ \frac{n}{m} \mid ma > nb, m \text{과 } n \text{은 자연수} \right\}$$

아르키메데스 성질 등등이 가정되어 있으므로, 이로부터 $R(a, b)$ 를 데데킨트 절단의 양의 유리수 부분으로 생각할 수 있다는 것을 보일 수 있다. 또한,

보조정리 유클리드의 원론에서 정의된 것에 따라, a 가 b 에 대해 갖는 비율이 c 가 d 에 대해 갖는 비율과 동일하다고 하자. 그러면,

$$R(a, b) = R(c, d)$$

및 그 외 몇 가지를 보일 수 있으므로, ‘ a 가 b 에 대해 갖는 비율’을 데데킨트 절단 $R(a, b) \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}^-$ 이 나타내는 양의 실수로 생각할 수 있다.⁵ 대략 이런 관점에서 유클리드의 원론 5권의 정의를 데데킨트의 실수 정의와 동일시키는 경우들이 꽤 있다.

그렇지만, 유클리드의 원론에서는 원론에서 제시하는 기하학의 맥락 내에서 생각될 수 있는 비율까지만 다룬 것으로 보인다. 그리고 원론에서 제시하는 기하학을 거리공간 $\mathbb{R}^2$ 에 대한 기하학과 동등하다고 가정할 때에만, 원론에서 제시된 기하학에서 생각될 수 있는 비율 전체를 양의 실수 전체와 동일시킬 수 있다. 그리고 앞서 말했듯이, 그런 가정은 필수적이지 않다.

⁵ $\mathbb{Q}^-$ 는 음의 유리수의 모임.

2 유클리드의 원론 5권의 몇몇 정의들, 2

2.1 정의 7

[여기서부터는 5월 15일 저녁 시간의 내용에 기반한 것입니다.]

V.def.7

(Heath) When, of the equimultiples, the multiple of the first magnitude exceeds the multiple of the second, but the multiple of the third does not exceed the multiple of the fourth, then the first is said to have a greater ratio to the second than the third has to the fourth.

이는, 어떤 자연수 m 과 n 에 대해 $ma > nb$ 이지만 $mc \leq nd$ 가 아닐 때,(즉 $ma > nb$ 이고 또한 $mc \leq nd$ 일 때) $a : b$ 는 $c : d$ 보다 크다는 것이다. 이것을 $a : b > c : d$ 라고 쓰기로 하고, $a' : b' < c' : d'$ 는 $c' : d' > a' : b'$ 라고 이해하자.

2.1.1 삼분법(trichotomy), 1

그렇다면, $a : b = c : d$ 와 $a : b > c : d$ 가 동시에 성립하지 않는다는 것은 분명하고, $a : b = c : d$ 와 $a : b < c : d$ 가 동시에 성립하지 않는 것도 분명하다. 이제 $a : b > c : d$ 이면서 $a : b < c : d$ 라고 하자. 즉,

$$ma > nb, mc \leq nd$$

$$m'a \leq n'b, m'c > n'd$$

인 자연수 m, n, m', n' 이 있다고 하자. 그러면

$$mm'a > nm'b, mm'c \leq nm'd$$

$$mm'a \leq mn'b, mm'c > mn'd$$

로부터

$$nm'b < mm'a \leq mn'b$$

$$mn'd < mm'c \leq nm'd$$

이고, $nm' < mn'$ 과 $mn' < nm'$ 를 얻으므로 모순이다.

정리하면 $a : b = c : d$ 와 $a : b > c : d$ 와 $a : b < c : d$ 중 둘 이상이 동시에 성립하지 않는다.

2.1.2 삼분법(trichotomy), 2

그런 다음, 아마도 다음을 궁금해할 것으로 보인다. 셋 중 하나가 성립한다는 것도 보일 수 있는가? 이에 대해 직접 보일 수도 있고, 다음과 같은 방법을 택할 수도 있겠다. 예를 들어 다음 (A), (B), (C)

중 정확히 하나만이 성립한다는 것은 어렵지 않게 확인할 수 있다. (여기서부터는 조금 길어질 수도 있는 문장들을 논리학의 기호를 사용하여 공간을 절약하는 방식으로 표기하고자 한다. “모든 자연수 m, n 에 대하여”는 $(\forall m, n \in \mathbb{N})$ 로, “어떤 자연수 m, n 에 대하여”는 $(\exists m, n \in \mathbb{N})$ 로 쓰고, “그리고”는 $\wedge$ 로, “또는”은 $\vee$ 로 쓰고, 또한 ‘A이면 B이다. 그리고 B이면 A이다’는 $A \leftrightarrow B$ 로 쓰겠다.)

$$(A) (\forall m, n \in \mathbb{N})(ma > nb \leftrightarrow mc > nd)$$

$$(B) (\exists m, n \in \mathbb{N})(ma > nb \wedge mc \leq nd)$$

$$(C) (\exists m, n \in \mathbb{N})(ma \leq nb \wedge mc > nd)$$

또한 $a : b = c : d$ 를 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$(\forall m, n \in \mathbb{N})[(ma > nb \leftrightarrow mc > nd) \wedge (ma = nb \leftrightarrow mc = nd) \wedge (ma < nb \leftrightarrow mc < nd)]$$

이 때 $a : b = c : d$ 로부터 (A)가 얻어지는 것은 분명하므로, (A)로부터 $a : b = c : d$ 를 보이면 충분하다.

(A)가 성립한다고 하고, 또한 $ma = nb$ 라고 하자. 그 때 $mc > nd$ 이면 (A)에 모순이고, $mc = nd$ 인 경우에는 보일 것이 없다. 따라서 $mc < nd$ 라고 하자.

만약 $(m+1)c < nd$ 라면 $(m+1)a > ma = nb$ 이므로 (A)와 모순이다. 또한 만약 $(2m+1)c < 2nd$ 라면 $(2m+1)a > 2ma = 2nb$ 이므로 (A)와 모순이고, 마찬가지로 $(3m+1)c < 3nd$ 라면 $(3m+1)a > 3ma = 3nb$ 이므로 (A)와 모순이다. 그런데 아르키메데스 성질에 의하여 $(m+1)c < nd$, $(2m+1)c < 2nd$, $(3m+1)c < 3nd$, $\dots$ 중 하나는 성립한다.⁶ 따라서 $ma = nb$ 이면서 $mc < nd$ 인 경우에도 (A)와 모순이다.

이것은

$$(\forall m, n \in \mathbb{N})[(ma > nb \leftrightarrow mc > nd) \wedge (ma = nb \leftrightarrow mc = nd)]$$

를 증명한 것이고, 다시 이로부터

$$(A') (\forall m, n \in \mathbb{N})[(ma \geq nb \leftrightarrow mc \geq nd)]$$

를 얻을 수 있다. 이제 (A)와 (A')로부터 $a : b = c : d$ 를 얻는 것은 어렵지 않다.

2.1.3 정의 5와 7 다시 보기

이쯤에서 한번쯤 정의 5와 7에 관한 것들을 모아서 정리해 보자. 우선 $a : b = c : d$ 는

$$(\forall m, n \in \mathbb{N})[(ma > nb \leftrightarrow mc > nd) \wedge (ma = nb \leftrightarrow mc = nd) \wedge (ma < nb \leftrightarrow mc < nd)]$$

⁶ $x = nd - mc$ 라고 하자. 그러면 아르키메데스 성질에 의해, 어떤 자연수 k 에 대해 $kx > c$ 이다. 그러면 $knd - kmc > c$ 이고, $(km+1)c < knd$ 이다.

로 정의되었고, $a : b > c : d$ 는

$$(\exists m, n \in \mathbb{N})(ma > nb \wedge mc \leq nd)$$

로 정의되었다. 또한 $a : b < c : d$ 는 $c : d > a : b$ 로 이해하기로 하자. 그러면 정의로부터 바로 다음이 얻어지고, 유클리드는 이를 더 설명이 필요하지 않은 것으로 간주한 듯하다.(여기서 $\neg p$ 는 ‘ p 가 아니다’이다)

$$a : b = a : b \quad (1)$$

$$(a : b = c : d) \rightarrow (c : d = a : b) \quad (2)$$

$$a : b \not\asymp a : b \quad (3)$$

$$\neg[(a : b > c : d) \wedge (a : b = c : d)] \quad (4)$$

한편, 유클리드는 5권 명제 10의 증명에서 다음을 따로 증명하지 않고 사용했다.

$$\neg[(a : b > c : d) \wedge (a : b < c : d)] \quad (5)$$

(5)의 증명은 위의 3.1.1에 있다. 그 외에 다음을 생각할 수 있는데, 이것을 사용하는 증명은 적어도 유클리드의 원론 5권에서 나는 아직 찾지 못했다.

$$[(a : b > c : d) \vee (a : b = c : d) \vee (a : b < c : d)] \quad (6)$$

(6)의 증명은 위의 3.1.2에 있다.

그 외에 다음을 생각해볼 수 있겠다.

$$[(a : b = c : d) \wedge (c : d = e : f)] \rightarrow (a : b = e : f) \quad (7)$$

$$[(a : b = c : d) \wedge (c : d > e : f)] \rightarrow (a : b > e : f) \quad (8)$$

$$[(a : b = c : d) \wedge (c : d < e : f)] \rightarrow (a : b < e : f) \quad (9)$$

$$[(a : b < c : d) \wedge (c : d < e : f)] \rightarrow (a : b < e : f) \quad (10)$$

이 중 (7)을 유클리드는 원론 5권의 명제 11에서 증명하고, (8)은 원론 5권 명제 13에서 증명했다. (9)를 유클리드가 따로 증명하지는 않고 몇몇 곳에서 사용한 것으로 보이는데 다만 그 증명이 (8)의 증명과 크게 다르지는 않을 것이다.

(10)은 유클리드가 증명하지 않았다.(다만 그것을 사용하는 것을 유클리드의 원론 5권 내에서는 나는 아직 발견하지 못했다.) 다만 예를 들어

$$[(a : d < b : d) \wedge (b : d < c : d)] \rightarrow (a : d < c : d)$$

는, 유클리드의 원론 5권 명제 7,8,9,10을 사용해서 바로 보일 수 있고, 원론 5권의 다른 명제들도 이용하면 $a : b < c : d$ 이고 $c : d < e : f$ 이고 b, d, f 가 통약가능한 경우에도 $a : b < e : f$ 를 보일 수 있다.(다만 (9)가 필요할 것으로 보인다)

또한, $a : b = c : d$ 가

$$(\forall m, n \in \mathbb{N})[(ma > nb \leftrightarrow mc > nd) \wedge (ma = nb \leftrightarrow mc = nd) \wedge (ma < nb \leftrightarrow mc < nd)]$$

로 정의되어 있기는 하지만, 이것을 보이기 위해서는

$$(\forall m, n \in \mathbb{N})[(ma > nb \rightarrow mc > nd) \wedge (ma = nb \rightarrow mc = nd) \wedge (ma < nb \rightarrow mc < nd)]$$

만으로도 충분하다. 이 사실을 별다른 추가 설명 없이 유클리드가 이용하는 것처럼 보이기도 하는데, 이하에서도 그렇게 할 것이다.

3 유클리드의 원론 5권의 몇몇 명제들

여기서는 유클리드의 원론 5권 중 몇몇을 유클리드의 순서대로 다루기보다는 조금 다른 순서대로 살펴보겠다. 라틴 문자 a, b, c, d, e, f 등을 따로 언급 없이 사용할 때 그것은 어떤 크기를 나타내고, $a:b$ 와 같은 표현이 등장할 때마다 a 와 b 와 같은 종류의 크기라는 것이 가정되어 있다.

3.1 5권 명제 11과 13 : 추이성(transitivity)에 관한 것들

먼저 다음을 보자.

5권 명제 11 $a:b=c:d$ 이고 $c:d=e:f$ 라고 하자. 그러면 $a:b=e:f$ 이다.

5권 명제 13 $a:b=c:d$ 이고 $c:d>e:f$ 라고 하자. 그러면 $a:b>e:f$ 이다.

이것을 보이기 위해서는 ‘...와 ...의 비율이 ...와 ...의 비율과 동일하다’의 정의와 ‘...와 ...의 비율이 ...와 ...의 비율보다 크다’의 정의를 확인하는 것만으로도 충분하고, 유클리드도 그렇게 했다.

3.1.1 더 일반적인 경우

한편 앞서 말했듯이 더 일반적으로 다음 또한 떠올려볼 수 있다.

$a:b>c:d$ 이고 $c:d>e:f$ 라고 하자. 그러면 $a:b>e:f$ 이다.

이것을 유클리드가 따로 증명하지는 않았지만, 우리는 다음과 같이 증명할 수 있다. 우선 정의로부터 어떤 자연수 m, n, m', n' 에 대해

$$\begin{aligned}ma &> nb, mc \leq nd \\ m'c &> n'd, m'e \leq n'f\end{aligned}$$

이다. 그러면

$$\begin{aligned}mn'a &> nn'b, mn'c \leq nn'd \\ nm'c &> nn'd, nm'e \leq nn'f\end{aligned}$$

이므로 $mn'c \leq nn'd < nm'c$ 이고, $mn' < nm'$ 이고, $mn'a < n'ma$ 이다. 그러면

$$(nm')a > (nn')b, (nm')e \leq (nn')f$$

인데 이는 $a:b>e:f$ 라는 것이다.

3.2 5권 명제 7에서 10까지 : 항들의 대소관계와 비율의 대소관계

그 다음으로 살펴볼 것들은 다음과 같다.

5권 명제 7 $a = b$ 라고 하자. 그러면 $a : c = b : c$ 이고 $c : a = c : b$ 이다.

5권 명제 8 $a > b$ 라고 하자. 그러면 $a : c > b : c$ 이고 $c : a < c : b$ 이다.

5권 명제 9 $a : c = b : c$ 라고 하자. 그러면 $a = b$ 이다. 또한 $c : a = c : b$ 라고 하자. 그러면 $a = b$ 이다.

5권 명제 10 $a : c > b : c$ 라고 하자. 그러면 $a > b$ 이다. 또한 $c : a < c : b$ 라고 하자. 그러면 $a > b$ 이다.

명제 7은 비율의 동일함의 정의로부터 바로 나오고, 유클리드도 그렇게 했다. 또한 유클리드는 명제 9를 명제 8과

$$\neg[(a : b > c : d) \wedge (a : b = c : d)]$$

를 사용하여 귀류법으로 증명했고, 명제 10을 유클리드는 명제 7, 8과

$$\neg[(a : b > c : d) \wedge (a : b < c : d)]$$

을 사용하여 귀류법으로 증명했다.

예를 들어 명제 9를 증명하려면, $a : c = b : c$ 라고 한 다음 $a = b$ 가 아니라고 가정하면 모순이 있음을 보이면 된다. 그리고 $a = b$ 가 아니라면 $a > b$ 이거나 $a < b$ 인데, 앞의 경우에는 $a : c > b : c$ 이고 뒤의 경우에는 $b : c > a : c$ 이고, 어느 경우든 주어진 $a : c = b : c$ 과 모순이다. 명제 10에 대해서도 비슷하게 보일 수 있다.

따라서 명제 8이 관건인데, 그것에 대한 유클리드의 증명은 대략 다음과 같다.

5권 명제 8 $a > b$ 라고 하자. 그러면 $a : c > b : c$ 이고 $c : a < c : b$ 이다.

$a > b$ 이므로 $a = a_1 + a_2$, $a_2 = b$ 라고 둘 수 있다. a_1 과 a_2 중 작은 것을 여러 번 더하면 언젠가는 c 보다 클 것이다.

우선 $a_1 < a_2$ 라고 하고, a_1 을 m 번 더한 것 ma_1 이 c 보다 크다고 하고, 또한 ma_2 , mb 를 생각하자. 그런 다음 $c, 2c, 3c, \dots$ 를 mb 보다 처음으로 커지는 때까지 생각하고, 그렇게 해서

$$(n-1)c \leq mb < nc$$

라고 하자.

$ma_2 = mb$ 이고 mb 가 $(n-1)c$ 보다 작지 않으므로 ma_2 도 $(n-1)c$ 보다 작지 않다.

그런데 ma_1 이 c 보다 크므로, 합치면 $ma_1 + ma_2$ 는 $(n-1)c + c$ 보다 크다.

그런데 $ma_1 + ma_2$ 는 ma 이고 $(n-1)c + c$ 는 nc 이다. 즉 ma 는 nc 보다 크지만, mb 는 nc 보다 크지 않다. 따라서 $a : c > b : c$ 이다.

[이하생략]

이 때 우리는 a_1 을 $a - b$ 라고 표기할 수 있을 것이고, 유클리드의 아이디어를 거의 따라가면서도 군더더기 없는 증명을 만드는 것 역시 그리 어렵지는 않을 것이다.(유클리드는 $a - b < b$ 인 경우와 그렇지 않은 경우를 나누어서 증명하려고 한 듯하나, 그렇게 경우를 나누어서 증명할 필요는 없는 것으로 보인다. Zeeman(2008)의 “What’s wrong with Euclid Book V”에서도 비슷하게 보고 있는 듯하다)

한편, 5권 명제 7을 크기로부터 크기들의 비율로의 함수 $x \mapsto x : c$ 가 잘 정의되는 것으로도 이해할 수 있고(여기서 c 는 고정된 어떤 크기이고 이 함수의 정의역은 c 와 같은 종류의 크기들이 될 것이다), 5권 명제 8은 그 함수 $x \mapsto x : c$ 가 순서를 보존한다는 것으로(따라서 단사함수라는 것으로) 이해될 수 있다.

따라서 이 때 크기 c 를 고정했을 때 크기로부터 크기들의 비율로의 함수 $x \mapsto x : c$ 가 전사인지도 궁금할 수 있겠다. 선분들에 대해서는 유클리드가 이후 삼각형의 닮음을 사용해서 증명하는데, 바로 6권 명제 12이다. 6권 명제 12를 유클리드는 5권 명제 7과 6권 명제 2를 사용해서 증명했고, 6권 명제 2는 이후에 살펴볼 것이다.

3.3 5권 명제 4와 15 : 비율의 ‘유리수배’ 비슷한 무언가에 관한 보조정리

여기서 살펴보려고 하는 것은 다음 둘이다.

5권 명제 4 $a : b = c : d$ 라고 하고, m, n 이 자연수라고 하자. 그러면 $ma : nb = mc : nd$ 이다.

5권 명제 15 비율 $a : b$ 가 있고 m 이 자연수라고 하자. 그러면 $a : b = ma : mb$ 이다.

5권 명제 4를 위해서는 다음 둘에서 시작할 수 있다.

(5권 명제 2) a 가 크기이고 n, n' 이 자연수라고 하자. 그러면 $(n + n')a = na + n'a$

(5권 명제 3) a 가 크기이고 m, m' 이 자연수라고 하자. 그러면 $m'(ma) = (m'm)a$

이들을 현재의 관점에서 증명할 때는 자연수 m 이나 자연수 m' 에 대한 수학적귀납법 등을 사용하여 증명하겠지만, 유클리드는 대신 ‘ $m' = 2, m = 3$ 인 경우에 대해 보이겠다.(다른 경우에도 동일한 방법으로 할 수 있다)’와 같이 증명했다.

명제 2와 3을 유클리드가 어떻게 증명했는지에 대한 더 자세한 논의는 여기서는 다루지 않기로 하고, 명제 3이 확보되었다고 하자. 그리고 $a : b = c : d$ 라고 하고, m, n 이 자연수라고 하자.

이제 $ma : nb = mc : nd$ 를 보이기 위해서는 모든 자연수 m', n' 에 대해

$$m'(ma) > n'(nb) \leftrightarrow m'(mc) > n'(nd)$$

$$\wedge [m'(ma) = n'(nb) \leftrightarrow m'(mc) = n'(nd)]$$

$$\wedge [m'(ma) < n'(nb) \leftrightarrow m'(mc) < n'(nd)]$$

를 확인하면 되고, 예를 들어 $m'(ma) = (m'm)a$ 이므로 확인해야 할 것들은 $a : b = c : d$ 에서 확인된 것들에 이미 포함되어 있다.

5권 명제 15를 위해서는 다음에서 시작할 수 있다.

(5권 명제 1) a, b 가 크기이고 m 이 자연수라고 하자. 그러면 $m(a + b) = ma + mb$

명제 1을 유클리드가 어떻게 증명했는지에 대한 더 자세한 논의도 여기서는 생략하자. 그러면 이것과 비례의 동일함의 정의로부터

5권 명제 12 $a_1 : b_1 = a_2 : b_2 = \dots = a_n : b_n$ 이면, $a_1 : b_1 = (a_1 + \dots + a_n) : (b_1 + \dots + b_n)$

를 보일 수 있고, 유클리드 역시 그렇게 했다. ($a_1 : b_1 = a_2 : b_2$ 라고 하자. 이제 $ma_1 > nb_1$ 인 경우에는 $ma_2 > nb_2$ 이고 또한 $m(a_1 + a_2) = ma_1 + ma_2 > nb_1 + nb_2 = n(b_1 + b_2)$ 이다. $ma_1 = nb_1$ 인 경우에는.....) 그러면 5권 명제 15는 5권 명제 12의 특수한 경우가 되는데, 유클리드도 그렇게 보았다.

3.4 5권 명제 14와 20 : 비례가 주어질 때 항들의 대소관계에 관한 몇몇 보조정리

여기서 살펴보려고 하는 것은 다음 둘이다.

5권 명제 14 $a : b = c : d$ 라고 하자. $a > c$ 이면 $b > d$ 이고, $a = c$ 이면 $b = d$ 이고, $a < c$ 이면 $b < d$ 이다.

5권 명제 20 $a : b = d : e$ 이고 또한 $b : c = e : f$ 라고 하자. $a > c$ 이면 $d > f$ 이고, $a = c$ 이면 $d = f$ 이고, $a < c$ 이면 $d < f$ 이다.

유클리드의 증명은 각각 다음과 같다. 먼저 $a : b = c : d$ 이고 $a > c$ 라고 하자. 그러면 5권 명제 8에 의해 $a : b > c : b$ 이고, 다시 5권 명제 13에 의해 $c : d > c : b$ 이다. 그러면 5권 명제 10에 의해 $b > d$ 이다. 나머지 경우에도 비슷하게 증명할 수 있다.

이번에는 $a : b = d : e$ 이고 $b : c = e : f$ 이고 $a > c$ 라고 하자. 그러면 5권 명제 8에 의해 $a : b > c : b$ 이고, 5권 명제 13 및 몇 가지에 의해 $d : e > f : e$ 이다.⁷ 그러면 5권 명제 10에 의해 $d > f$ 이다. 나머지 경우에도 비슷하게 증명할 수 있다.

3.5 5권 명제 16과 22 : Alternation 및 Ex aequali.

여기서는 비례와 관련된 조작 또는 연산(operation) 중 몇몇을 다룰 것이며, 다음과 같다.

5권 명제 16 (Alternation) $a : b = c : d$ 라고 하자. 그러면 $a : c = b : d$ 이다.

5권 명제 22 (Ex aequali) $a : b = d : e$ 이고 또한 $b : c = e : f$ 라고 하자. 그러면 $a : c = d : f$ 이다.

유클리드의 증명은 각각 다음과 같다. 먼저 $a : b = c : d$ 라고 하고, a, b, c, d 는 같은 종류의 크기라고 하자. 그러면 5권 명제 11, 15에 의해 $ma : mb = nc : nd$ 이다. (m, n 은 자연수) 그러면 5권 명제 14에 의해

$$ma > nc \text{이면 } mb > nd \text{ 이고, } ma = nc \text{이면 } mb = nd \text{ 이고, } ma < nc \text{이면 } mb < nd$$

이다. 이는 $a : c = b : d$ 라는 것이다.

이번에는 $a : b = d : e$ 이고 또한 $b : c = e : f$ 라고 하자. 그러면 5권 명제 4에 의해 $ma : nb = md : ne$ 이고 $nb : kc = ne : kf$ 이다. (m, n, k 는 자연수) 그러면 5권 명제 20에 의해

$$ma > kc \text{이면 } md > kf \text{ 이고, } ma = kc \text{이면 } md = kf \text{ 이고, } ma < kc \text{이면 } md < kf$$

이다. 이는 $a : c = d : f$ 라는 것이다.

⁷위에서 이미 말한 것들 이외에 $b : c = e : f$ 로부터 $c : b = f : e$ 를 얻는 것이 필요하지만, 이것이 정의로부터 거의 바로 얻어지기는 한다.

4 유클리드의 원론 6권의 몇몇 명제들

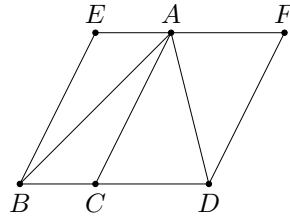
4.1 6권 명제 1 : 밑변의 비율과 삼각형(평행사변형)의 비율, 높이가 동일할 때

여기서 다룰 것은 대략 다음과 같다.

6권 명제 1 평행선 l, m 이 있다고 하고, 점 A, E, F는 평행선 l 위의 점이고 점 B, C, D는 평행선 m 위의 점이라고 하고, 사각형 AEBC와 사각형 AFDC가 평행사변형이라고 하자. 그러면

$$\overline{BC} : \overline{DC} = \triangle ABC : \triangle ADC$$

$$\overline{BC} : \overline{DC} = \square AEBC : \square AFDC$$



이에 대한 유클리드의 증명은 대략 다음과 같다. $m\overline{BC}$ 과 $n\overline{DC}$ 의 대소관계의 패턴이 $m\triangle ABC$ 과 $n\triangle ADC$ 의 대소관계의 패턴과 일치하는지 확인해야 하는데, 이를 위해 반직선 CB 위의 점 H와 반직선 CD 위의 점 L이

$$\overline{HC} = m\overline{BC}$$

$$\overline{LC} = n\overline{DC}$$

를 만족한다고 하자. 그러면

$$\triangle AHC = m\triangle ABC$$

$$\triangle ALC = n\triangle ADC$$

라는 것이 유클리드의 원론 1권 내의 것들로부터 얻어지고,

$$\overline{HC} > \overline{LC} \rightarrow \triangle AHC > \triangle ALC$$

$$\overline{HC} = \overline{LC} \rightarrow \triangle AHC = \triangle ALC$$

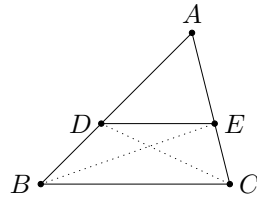
$$\overline{HC} < \overline{LC} \rightarrow \triangle AHC < \triangle ALC$$

역시 유클리드의 원론 1권 내의 것들로부터 얻어진다. 이들로부터 원하는 것들을 보일 수 있다.

4.2 6권 명제 2 : 평행선과 선분의 비례

여기서 다룰 것은 대략 다음과 같다.

6권 명제 2 삼각형 ABC가 있고, 점 D는 선분 AB 위의 점이고 점 E는 선분 AC 위의 점이라고 하자. 이 때 DE와 BC가 평행하면 $\overline{AD} : \overline{DB} = \overline{AE} : \overline{EC}$ 이고, 거꾸로 $\overline{AD} : \overline{DB} = \overline{AE} : \overline{EC}$ 이면 DE와 BC는 평행하다.



이에 대한 유클리드의 증명은 대략 다음과 같다. 6권 명제 1에 의해

$$\overline{AD} : \overline{DB} = \triangle ADE : \triangle DBE$$

$$\overline{AE} : \overline{EC} = \triangle AED : \triangle ECD$$

이므로, 다음이 확보되면 충분하다.

$$(DE \text{와 } BC \text{가 평행}) \rightarrow (\triangle DBE = \triangle ECD)$$

$$(\triangle DBE = \triangle ECD) \rightarrow (DE \text{와 } BC \text{가 평행})$$

그런데 이는 유클리드의 원론 1권에서 보여진 것이었다.

4.3 6권 명제 4에서 6까지 : 삼각형의 닮음조건

여기서 다룰 것은 대략 다음과 같다.

6권 명제 4 (AAA 닮음조건) 등각삼각형은 대응하는 변끼리 비례한다.

6권 명제 5 (SSS 닮음조건)

6권 명제 6 (SAS 닮음조건)

4.3.1 AAA 닮음조건

유클리드의 증명은 대략 다음과 같다. 점 B, C, E가 이 순서대로 한 직선 위에 있고, 선분 AD는 선분 BE의 연장선과 만나지 않는다고 하고,

$$\angle ABC = \angle DCE$$

$$\angle ACB = \angle DEC$$

$$\angle BAC = \angle CDE$$

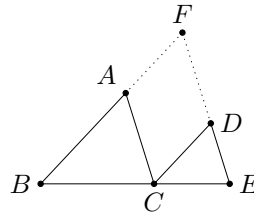
라고 하자.(이렇게 하여도 일반성을 잃지 않는다는 것을 유클리드가 명시적으로 언급하거나 설명하지는 않았다) 이 때

$$\overline{AB} : \overline{BC} = \overline{DC} : \overline{CE}$$

$$\overline{BC} : \overline{CA} = \overline{CE} : \overline{ED}$$

$$\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{DC} : \overline{DE}$$

를 보일 것이다.



문제의 상황 및 평행선공리에 의하여 반직선 BA와 반직선 ED가 만난다는 것을 보일 수 있고, 그 교점을 F라고 하자. 그러면 평행선과 동위각에 대한 정리(동위각이 같으면 평행하다) 그리고 원론 6권 명제 2로부터

$$\overline{AB} : \overline{AF} = \overline{CB} : \overline{CE}$$

인데

$$\overline{AF} = \overline{CD}$$

이므로, 5권 명제 7과 11과 16으로부터

$$\overline{AB} : \overline{AF} = \overline{AB} : \overline{CD} \quad (\text{V.7})$$

$$\overline{AB} : \overline{CD} = \overline{CB} : \overline{CE} \quad (\text{V.11})$$

$$\overline{AB} : \overline{BC} = \overline{DC} : \overline{CE} \quad (\text{V.16})$$

가 보여졌다. 다른 것들도 비슷한 방법으로 할 수 있고, 5권 명제 22까지 사용하면 필요한 것들이 모두 확인된다.

4.3.2 SSS 닮음조건

유클리드의 증명은 대략 다음과 같다. 삼각형 ABC와 DEF에 대해

$$\overline{AB} : \overline{BC} = \overline{DE} : \overline{EF}$$

$$\overline{BC} : \overline{CA} = \overline{EF} : \overline{FD}$$

$$\overline{AB} : \overline{CA} = \overline{DE} : \overline{FD}$$

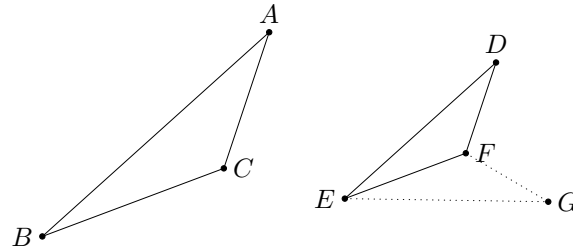
라고 하자. 이 때

$$\angle ABC = \angle DCE$$

$$\angle ACB = \angle DEC$$

$$\angle BAC = \angle CDE$$

를 보일 것이다.



삼각형 ABC와 삼각형 GEF가 등각이 되게 하는(삼각형 ABC의 각 A, B, C가 각각 삼각형 GEF의 각 G, E, F와 합동인) 점 G를 만들자. 그런 다음 삼각형 DEF와 삼각형 GEF가 SSS 합동이라는 것을 보이자.

예를 들어, 주어진 조건에 의해

$$\overline{AB} : \overline{BC} = \overline{DE} : \overline{EF}$$

이고, 삼각형 ABC와 삼각형 GEF가 등각이므로 6권 명제 4에 의해

$$\overline{AB} : \overline{BC} = \overline{GE} : \overline{EF}$$

이다. 그러면 5권 명제 11에 의해

$$\overline{DE} : \overline{EF} = \overline{GE} : \overline{EF}$$

이고, 5권 명제 9에 의해

$$\overline{DE} = \overline{GE}$$

이다. 나머지도 비슷하게 할 수 있다.

그러면 삼각형 DEF와 삼각형 GEF가 합동이고 삼각형 ABC와 삼각형 GEF가 등각이라는 것으로부터, 삼각형 ABC와 삼각형 DEF가 대응하는 각들끼리 서로 같다는 것을 보일 수 있다.

4.3.3 SAS 닮음조건

삼각형 ABC와 삼각형 DEF에 대해

$$\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{DE} : \overline{DF}$$

$$\angle BAC = \angle EDF$$

라고 하자. 이 때

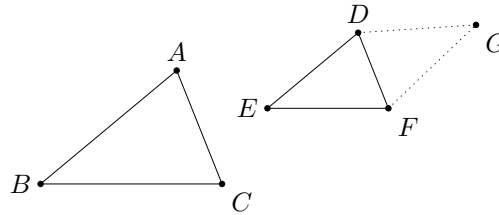
$$\overline{AB} : \overline{BC} = \overline{DE} : \overline{EF}$$

$$\overline{BC} : \overline{CA} = \overline{EF} : \overline{FD}$$

$$\angle ABC = \angle DCE$$

$$\angle ACB = \angle DEC$$

를 보일 것이다.



삼각형 ABC와 삼각형 DGF가 등각이 되게 하는(삼각형 ABC의 각 A, B, C가 각각 삼각형 DGF의 각 D, G, F와 합동인) 점 G를 만들자. 그런 다음 삼각형 DEF와 삼각형 DGF가 SAS 합동이라는 것을 보이자.

즉

$$\overline{DE} = \overline{DG}$$

를 보이면 충분한데, 이것은 삼각형 ABC와 삼각형 DGF가 등각이므로

$$\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{DG} : \overline{DF}$$

라는 것과 주어진 조건에서

$$\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{DE} : \overline{DF}$$

라는 것으로부터 원론 5권 명제 9, 11로부터 보일 수 있다.

그러면 삼각형 DEF와 삼각형 GEF가 합동이고 삼각형 ABC와 삼각형 GEF가 등각이라는 것로부터, 원하는 것들을 보일 수 있다.

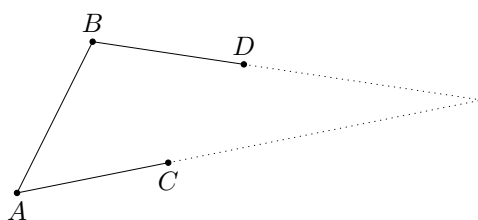
A Foundation에 관한 것들

에우클레이데스(유클리드)의 원론은 정의(Definition), 공준(Postulate), 공통 개념(Common Notion), 명제(Proposition)으로 이루어져 있고, 이 중 공준과 공통 개념은 1권에만 있다. 대략 말해 공준은 주어진 상황에서 우리가 무엇을 구성할 수 있는지에 대한 것이고, 대략 말해 공통 개념은 주어진 상황에서 우리가 무엇을 추론할 수 있는지에 대한 것이다.

A.1 공준

예를 들어, 첫 번째 공준은 임의의 한 점에서 다른 점까지 선분(원어를 충실하게 번역하면 ‘직선’인 듯하다)을 그을 수 있다는 것이고, 유명한 다섯 번째 공준은 대략 다음과 같은 내용을 말하고 있다.

공준 5 선분 AB가 있다고 하고, 또한 선분 AC와 선분 BD는 [선분 AB의 연장선에 의해 분리되는 평면의 두 부분 중] 동일한 부분에 있다고 하고, 각 BAC와 각 ABD의 합이 직각의 두 배보다 작다고 하자. 그러면 AC와 BD를 무한히 연장하면 각 BAC와 각 ABD가 있는 부분에서 만난다.



여기서 각과 각의 합이 무엇인지에 대한 명시적 정의를 유클리드가 제시하지는 않았다. 이로부터 바로 유클리드의 원론에 결함이 있다고 나아가기보다는, 유클리드의 원론의 다른 곳들로부터 유클리드가 각과 각의 합으로 무엇을 생각하고 있었는지를 추출할 수 있는지 살펴볼 수 있다. 그것이 힐베르트가 한 작업이었고, Hartshorne의 *Geometry: Euclid and Beyond* 또한 그 방향을 따르고 있다.

이 공준은 적절한 기초 위에서 ‘임의의 직선 l , 그리고 l 이 지나지 않는 임의의 점 A에 대해, A를 지나면서 l 에 평행한 직선이 유일하게 존재한다’와 동등하다(equivalent). 또한 위의 공준 5는 삼각형이 구성될 충분조건 중 하나를 제시한 것으로도 이해될 수 있어 보인다. 한편 ‘위와 같은 경우에서 각 BAC와 각 ABD의 합이 직각의 두 배와 같으면 AC와 BD가 평행하다’(I.27의 간단한 따름정리)를 유클리드는 공준 5를 사용하지 않고 증명했고, 힐베르트가 제시한 유클리드기하학의 공리계에서도 평행선공리 없이 증명된다.

A.2 공통 개념

공통 개념이 어떤 것들인지 간략히 살펴보기 위해서는 원론 1권의 첫 번째 명제와 같이 보는 것이 좋을 듯하다. 앞서 말했듯이 명제(Proposition)는 정리(Theorem)와 문제(Problem)으로 나뉘는데, 정리는 어떤 수학적 사실을 보이는 것이고 문제는 어떤 수학적 대상을 구성하는 것이다. 1권의 첫 번째 명제는 문제에 속하고, 주어진 선분을 한 변으로 하는 정삼각형을 구성하는 문제이다. 이를 가능한 원래의 것 그대로 옮겨오면 다음과 같다.(이하의 모든 유클리드의 원론의 한국어 번역은 여러 영어 번역들을 참고하면서 그로부터 내가 한국어로 번역한 것이다.)

원론 1권 명제 1 주어진 선분을 한 변으로 하는 정삼각형을 만드시오.

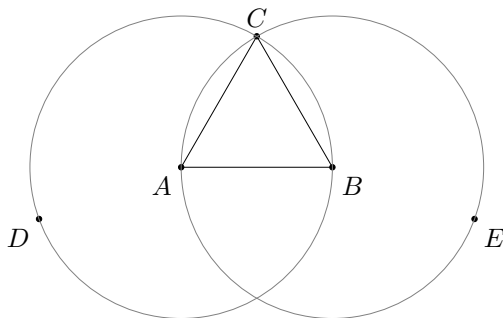
주어진 선분을 AB라고 하자.

여기서 요구된 것은 선분 AB를 한 변으로 하는 정삼각형을 구성하는 것이다.

A를 중심으로 하고 AB를 반지름으로 하는 원을 그려서 BCD라고 하고, B를 중심으로 하고 BA를 반지름으로 하는 원을 그려서 ACE라고 하고, 점 C에서 원들이 서로를 자른다고 하고, 선분 CA와 CB를 만들자.

점 A가 원 CDB의 중심이므로, AC는 AB와 같다. 다시 점 B가 원 CAE의 중심이므로, BC는 BA와 같다. 그런데 CA가 AB와 같다고 하였고, CA와 CB는 각각 AB와 같다. 그런데 동일한 것과 같은 것들은 그것들끼리 서로 같다. 따라서 CA는 CB와 같고, 따라서 그 셋, CA, AB, BC는 서로 같다.

따라서, 삼각형 ABC는 정삼각형이고 주어진 AB를 한 변으로 하는데, 이것이 만드려는 것이었다.



여기서 주목할 곳은 “점 A가 원 CDB의 중심이므로, AC는 AB와 같다.”이다. 어쩌면 우리에게 보다 익숙한 것은 선분 AC의 길이는 선분 AB의 길이가 같다는 것이지만, 유클리드는 그렇게 하지 않는다. 선분들에 수들을 잘 할당한 다음 그 할당된 수들이 같다고 하는 것(측도measure의 개념을 안다면 그것을 떠올려도 좋다)이 아니라, 선분들이 같다고 말한다.

이 외에도 유클리드는 2차원 도형들 사이의 같음을 얘기하고, 각과 각 사이의 같음을 얘기하고,

3차원 도형들 사이의 같음을 이야기한다. 게다가 유클리드가 2차원 도형들 사이의 같음을 얘기할 때는 두 가지 의미의 같음(따라서, 말하자면, 서로 다른 두 개념)을 이야기하고 있다.

그렇지만 여기서도 마찬가지로, 유클리드가 무엇을 생각하고 있었는지 추출하는 것은 어렵지 않다. 우선 아래의 공통 개념 1과 4를 보자.

공통 개념 1 동일한 것과 같은 것들은 그것들끼리 서로 같다.

공통 개념 4 완전히 포개지는/딱 들어맞는 것들은 서로 같다.

여기서 ‘동일한 것’과 ‘같은 것’은 구분되고 있고, 영어 번역으로는 각각 ‘same’과 ‘equal’, 그리스어 원어에서는 ‘αὐτός’의 활용형, ‘ἴσος’의 활용형이다.(이는 각각 현재의 automorphism, isomorphism의 ‘auto’와 ‘iso’라는 접두어의 어원이다.) 동일한 것은 동일한 기호로 나타내기로 하고 ‘같다’는 ~으로 쓰기로 한다면, 공통 개념 1이 말하는 것은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} a \sim b \text{이고 } a \sim c \text{인 } b \text{와 } c \text{에 대해, } b \sim c \\ b \sim a \text{이고 } c \sim a \text{인 } b \text{와 } c \text{에 대해, } b \sim c \end{aligned}$$

여기서 ~의 reflexivity가 확보되어 있다면, 공통 개념 1은 ~이 현재의 우리가 동등관계(equivalence relation)라고 부르는 것의 정의를 만족시킨다는 것이 된다. 또한, 공통 개념 4는, 합동인 것들은 서로 같다는 것으로 이해되어 왔다.

물론, 보다 엄격하게 하려면 합동의 개념이 미리 주어져 있어야 하는 것 아니냐고 물을 수 있다. 만약 강제운동(평행이동, 대칭이동, 회전이동의 합성)에 의해 보내지는 것(푸앵카레가 그렇게 해석했다는 것 같다)으로 이해한다면, 강제운동의 개념이 먼저 주어져야 할 것이고, 그것을 위해서는 다른 것들이 더 먼저 주어져야 할 것이고, 등등. 이런 것들을 고려해서인지 힐베르트는 선분과 선분의 합동, 각과 각의 합동을 primitive notion/term⁸으로 둔 다음 이로부터 삼각형의 합동, 다각형의 합동 등등을 규정하는 방법을 채택했다. Hartshorne의 *Geometry: Euclid and Beyond* 또한 그 방법을 따르고 있다.

⁸대한수학회하는 ‘무정의용어’를 번역어로 제안하고 있지만, 아주 들어맞는지는 잘 모르겠다...

A.2.1 2차원 도형의 같음에 대해서

그런데 선분과 선분의 같음과 달리 2차원 도형에 대해서 유클리드는 두 가지 종류의 '같음' 개념을 사용하는 것으로 보인다. 하나는 합동이라는 의미의 같음이고, 다른 하나는 대략 다음과 같은 무엇이다.

- (a) 합동인 2차원 도형은 서로 같다.
 - (b) 동일한 2차원 도형과 같은 2차원 도형들은 서로 같다.
 - (c) 2차원 도형 A와 B가 겹치는 부분이 없으면서(부연하자면 공통 부분이 2차원 미만이라는 의미에서) 합쳐진 것이 2차원 도형 C이고, 2차원 도형 A'와 B'가 겹치는 부분이 없으면서 합쳐진 것이 2차원 도형 C'이고, A는 A'와 같고 B는 B'와 같다고 하자. 그러면 C는 C'와 같다.
 - (d) 2차원 도형 A와 A'가 같고, A의 부분인 2차원 도형 B와 A'의 부분인 2차원 도형 B'가 같다고 하자. 그러면 A에서 B를 뺀 것과 A'에서 B'를 뺀 것이 서로 같다.
 - (e) 2차원 도형 A와 A'가 서로 같고, 2차원 도형 B를 그것과 같은 2차원 도형과 겹치는 부분이 없으면서 합친 것이 A이고, 2차원 도형 B'를 그것과 같은 2차원 도형과 겹치는 부분이 없으면서 합친 것이 A'이라고 하자. 그러면 B는 B'와 같다.
 - (f) 2차원 도형 B가 2차원 도형 A의 진부분이라고 하자. 그러면 A와 B는 같지 않다.
- (공통 개념 5)

유클리드는 이 개념이 미리 잘 주어져 있는 개념이라고 생각하면서 이를 사용하는 편이지만, 한편으로는 위의 (a)~(f)를 모두 만족하는 개념이 정말로 존재하는지를 따져볼 수 있다. 물론, 2차원 도형이라는 것을 실평면 $\mathbb{R}^2$ 의 르벡-가측인(Lebesgue-measurable) 부분집합으로 간주한 다음 2차원 도형이 같다는 것을 그것의 르벡측도의 값이 같다는 것으로 간주하는 등과 같이 생각하면 (a)~(f)를 만족시키기는 할 것이다.

대신 다각형에 한정했을 때 (a)~(f)를 만족시키는 개념이 존재한다는 것은 보다 초등적으로 증명할 수 있고, 이 때는 평면과 $\mathbb{R}^2$ 사이의 동형 또는 동일시를 가정할 필요가 없으며, 힐베르트가 그 작업을 수행한 바 있다. 이에 대한 설명은 Hartshorne의 *Geometry: Euclid and Beyond*의 5장에서 읽을 수 있다.

어쨌든, 위의 (a)~(f)를 만족하는 다각형의 같음이 주어져 있다고 하면, 이것을 사용하는 '밑변이 같고 높이가 같은 평행사변형은 서로 같다'(I.36), '밑변이 같고 높이가 같은 삼각형은 서로 같다'(I.38)에 대한 유클리드의 증명을 거의 그대로 받아들일 수 있다.

A.3 교차에 관해

이쯤에서 다시 원론의 1권 명제 1로 돌아오자. 다시 옮겨오면 이렇다.

원론 1권 명제 1 주어진 선분을 한 변으로 하는 정삼각형을 만드시오.

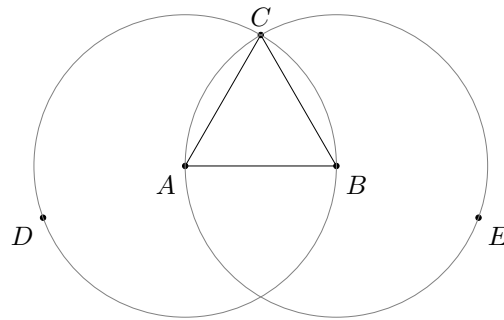
주어진 선분을 AB라고 하자.

여기서 요구된 것은 선분 AB를 한 변으로 하는 정삼각형을 구성하는 것이다.

A를 중심으로 하고 AB를 반지름으로 하는 원을 그려서 BCD라고 하고, B를 중심으로 하고 BA를 반지름으로 하는 원을 그려서 ACE라고 하고, 점 C에서 원들이 서로를 자른다고 하고, 선분 CA와 CB를 만들자.

점 A가 원 CDB의 중심이므로, AC는 AB와 같다. 다시 점 B가 원 CAE의 중심이므로, BC는 BA와 같다. 그런데 CA가 AB와 같다고 하였고, CA와 CB는 각각 AB와 같다. 그런데 동일한 것과 같은 것들은 그것들끼리 서로 같다. 따라서 CA는 CB와 같고, 따라서 그 셋, CA, AB, BC는 서로 같다.

따라서, 삼각형 ABC는 정삼각형이고 주어진 AB를 한 변으로 하는데, 이것이 만드려는 것이었다.



여기서는, 점 A를 중심으로 하고 반지름이 AB인 원과 점 B를 중심으로 하고 반지름이 BA인 원이 공통으로 지나는 점이 존재한다는 것이 따로 말없이 주장되고 있다. 이에 대해 대략 근대 시기부터, 그 교점의 존재를 이끌어내는 공리가 보충되어야 한다는 견해들이 있었다.

그에 따라 현재의 시점에서는 그것을 원과 원의 교점에 대한 것들을 이끌어낼 수 있을 정도까지만 강한 공리를 가정하기도 하고, 그보다 훨씬 강한 공리를 가정하기도 한다.

A.3.1 데데킨트의 공리

예를 들어, 평면기하 내로 한정하기로 하고, 실질적으로

이 기하학의 평면은 거리공간 $\mathbb{R}^2$ 와 거리공간으로서 동형이다

와 같은 내용의 공리가 있는데(그 구체적인 formulation을 보면 실수를 구성할 때 사용하는 데데킨트 절단의 기하학적 버전이어서 데데킨트의 공리라고도 불린다), 그 때에 교점 C의 존재는 어렵지 않게 이해될 수 있다.(A를 원점, B를 (1, 0)에 대응한다고 두면, $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ 에 대응하는 점이 C가 되지 않겠는가?)

A.3.2 타르스키의 공리

다만 그 공리는 1차논리 단독으로는 표현될 수 없고, 2차논리를 사용하는 경우에 또는 1차논리와 집합론을 모두 가정한 foundation의 경우에 표현될 수 있는 공리이다. 이 공리와 거의 같은 내용이면서(여기서는 이것이 정확히 무슨 의미인지는 다루지 않겠다) 1차논리 내에서 표현될 수 있는 공리를 타르스키가 제안한 바 있다. 그 공리를 타르스키의 공리라고 하자.(이 문단 내에서 사용된 개념에 익숙치 않다면, 그냥 타르스키의 공리라는 게 있다는 것 정도로 넘어가도 좋다.)⁹

힐베르트가 제안했던 공리들, 그러니까 ‘점과 직선의 위치 관계에 대한 공리 세 개, 직선 위의 한 점이 다른 두 점 사이에 있음과 관련된 공리 네 개, 선분의 합동에 대한 공리 세 개, 각의 합동에 대한 공리 세 개’를 HP라고 쓰기로 하자.¹⁰ 그러면 이들에 대해 다음이 성립한다.

대수적 실수(정수 계수 다항방정식의 해가 되는 실수)의 모임을 F 라고 하자.

HP, 평행선공리, 타르스키의 공리를 모두 만족시키는 경우들(모형들) 중에서, 평면이 거리공간 F^2 와 거리공간으로서 동형인 것이 있다.

한편, HP와 평행선공리와 타르스키의 공리를 합친 것에 해당하는 공리계가 완전하다는 것은 알려져 있다. 이는 일차논리와 (HP + 평행선공리 + 타르스키의 공리)만으로는 자연수에 대한 충분한 사실들을 표현하지 못하기 때문에 그런 것이다.(만약 그렇지 않다면 괴델의 불완전성 정리에 의해 완전한 공리계일 수 없다)

A.3.3 원-원 교차 성질

그런데 앞서 말한 바와 같이 원과 원의 교점에 대한 것들을 이끌어낼 수 있을 정도까지만 강한 공리를 가정할 수도 있다. 원의 내부와 외부라는 개념이 잘 마련되어 있다고 하고, 그런 다음,

⁹이 때 데데킨트의 공리를 가정하면 타르스키의 공리가 증명되지만, 역은 성립하지 않는다.

¹⁰HP 및 평행선공리는 모두 1차논리만으로 표현가능하다.

(원-원 교차 성질) 원 C' 의 내부에 있는 점 A , C' 의 외부에 있는 점 B 가 있다고 하고, 원 C 가 점 A 와 점 B 를 지난다고 하자. 그러면 원 C 와 원 C' 의 교점이 존재한다.

라는 공리 E 를 생각하자.¹¹ 그러면, 실질적으로, HP 와 평행선공리와 공리 E 는 작도가능한 대상의 존재까지만 보장한다. 이는 다음으로부터 알 수 있다.

작도가능한 실수의 모임(유리수를 모두 포함하고, 양수의 제곱근에 대해 닫혀 있는 가장 작은 체(field))을 k 라고 하자.

HP , 평행선공리, 공리 E 를 모두 만족시키는 경우들(모형들) 중에서, 평면이 거리공간 k^2 와 거리공간으로서 동형인 것이 있다.

이로부터 정칠각형의 존재가 ($HP + \text{평행선공리} + \text{공리 } E$)로부터 증명가능하지 않다는 것을 얻는다.(정칠각형은 작도가능하지 않고 등등 때문에.) 한편 거리공간 $\mathbb{R}^2$ 에서 ($HP + \text{평행선공리} + \text{공리 } E$)가 모두 성립하고 또한 거리공간 $\mathbb{R}^2$ 에는 정칠각형이 존재하기 때문에, ($HP + \text{평행선공리} + \text{공리 } E$)로부터 정칠각형의 존재의 부정 역시 증명가능하지 않다.

한편, 유클리드의 원론으로 조금 돌아간다면, 원론에서는 작도가능한 도형들 이외의 것에 대해서는 거의 얘기하지 않는다. 물론 고대 그리스 수학이 작도가능한 것만 다룬 것은 아니고, ‘원뿔곡선을 이용하면 각의 3등분이나 정육면체 2배 문제를 풀 수 있다’ ‘아르키메데스 나선의 접선을 구할 수 있으면, 그것을 가지고 원과 같은 정사각형을 만들 수 있다’ 등도 고대 그리스 시기에 알려져 있었다. 따라서 유클리드의 원론은 보다 기본적인 것까지만 다루었다고 보는 것이 좋을 것이고, 원론에서 제시된 기하학은 거리공간 $\mathbb{R}^2$ 의 기하학보다 약한 무언가라고 하는 것이 원론의 내용과 방법에 보다 부합하다고 생각한다.

B Hartshorne의 Geometry: Euclid and Beyond로부터의 두 인용문

“Euclid’s Propositions (I.2) and (I.3) about transporting line segments are effectively replaced by axiom (C1). Proposition (I.4), (SAS), has been replaced by axiom (C6). Proposition (I.5) and its proof are ok as they stand. In other words, every step of Euclid’s proof can be justified in a straightforward manner within the framework of a Hilbert plane. [...] Summing up, we have the following theorem.

¹¹마찬가지로 타르스키의 공리를 가정하면 공리 E 가 증명되지만, 역은 성립하지 않는다.

Theorem 10.4 All of Euclid's proposition (I.1) through (I.28), except (I.1) and (I.22), can be proved in an arbitrary Hilbert plane, as explained above" (97쪽, 102쪽)

"From the point of view of this book, however, there are two reasons to avoid using Dedekind's axiom. First of all, it belongs to the modern development of the real numbers and notions of continuity, which is not in the spirit of Euclid's geometry. Second, it is too strong. By essentially introducing the real numbers into our geometry, it masks many of the more subtle distinctions and obscures questions such as constructibility that we will discuss in Chapter 6. So we include this axiom only to acknowledge that it is there, but with no intention of using it." (116쪽)