

수학 문제 연구회

선형대수학과 다중선형사상

Taeyoung Kim

정의 1. 벡터 공간 (Vector Space) 사칙 연산이 정의된 집합 F 와 집합 V 위에 연산 $+: V \times V \rightarrow V$ 와 $\cdot: F \times V \rightarrow V$ 가 있어서 조건 (V.1) ~ (V.7)을 만족하면, $(V, +, \cdot)$ 을 F -벡터 공간이라고 한다. 이때, $+$ 를 벡터 공간의 덧셈, $\cdot$ 를 상수배 (scalar multiplication)라고 칭하는데, $\cdot$ 의 경우 생략하여 표시하는 경우가 많다. 간단하게 $(V, +, \cdot)$ 를 V 로 표기하기도 한다.

- (V.1) - 임의의 $u, v, w \in V$ 에 대하여 $(u + v) + w = u + (v + w)$ 가 성립한다. (결합법칙)
- (V.2) - 모든 원소 $v \in V$ 에 대하여 $v + 0 = 0 + v = v$ 를 만족하는 원소 $0 \in V$ 가 존재한다. (항등원)
- (V.3) - 각각의 $v \in V$ 에 대해 $v + w = 0$ 을 만족하는 $w \in V$ 가 존재한다. 이때 w 를 $-v$ 로 표기한다. (역원)
- (V.4) - 임의의 $u, v \in V$ 에 대해 $u + v = v + u$ 가 성립한다. (가환성)
- (V.5) - 임의의 $a, b \in F, v \in V$ 에 대하여 $(ab) \cdot v = a \cdot (b \cdot v)$ 가 성립한다.
- (V.6) - $1_F \in F$ (F 의 곱셈 항등원)와 모든 원소 $v \in V$ 에 대하여 $1_F \cdot v = v$ 가 성립한다.
- (V.7) - 임의의 $a, b \in F, u, v \in V$ 에 대하여 $(a + b) \cdot (u + v) = a \cdot u + a \cdot v + b \cdot u + b \cdot v$ 가 성립한다.

여기서 조건 (V.1) ~ (V.4)은 $(V, +)$ 가 가환군 (Abelian Group)일 조건이다. 사칙 연산이 정의된 집합(즉, 체 (Field)) F 는 앞으로의 논의에서 덧셈과 곱셈이 정의된 $\mathbb{R}$ 로 고정한다. 그리고 벡터의 역원과의 덧셈을 다음과 같이 표기한다: $u + (-v) = u - v$.

예제 1. 유클리드 공간 (Euclidean Space) 각각의 성분이 실수($x_i \in \mathbb{R}$)인 순서쌍 $(x_1, \dots, x_n)$ 들의 집합을 $\mathbb{R}^n$ 으로 정의한다. 해당 집합 위에 다음과 같이 덧셈 연산을 정의하자:

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) := (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n).$$

그러면 $(V, +)$ 가 조건 (V.1) ~ (V.4)를 만족한다는 것을 쉽게 알 수 있다. 이제 상수배 연산 $\cdot$ 도 다음과 같이 정의하면 $(V, +, \cdot)$ 이 벡터 공간이 됨을 확인할 수 있다:

$$c \cdot (x_1, \dots, x_n) = c(x_1, \dots, x_n) := (cx_1, \dots, cx_n).$$

예제 2. 다양한 벡터 공간들 수학의 많은 대상들이 벡터 공간의 구조를 가지고 있다. 다음은 몇 가지 대표적인 예시들이다:

- 수열들의 집합 $\{(a_1, a_2, \dots) : a_i \in F\}$ 에 성분별 덧셈 (component wise addition)과 체 F 의 원소에 대해 성분별 곱셈으로 상수배를 정의하면 벡터 공간을 이룬다.
- 실수에서 실수로 가는 함수들의 집합 $\mathcal{F} := \{f : f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}\}$ 에 함수의 덧셈, 상수배를 정의하면 벡터 공간을 이룬다.
- $C(\mathbb{R}; \mathbb{R}) := \{f \in \mathcal{F} : f \text{ is continuous}\} \subset \mathcal{F}$ 도 $\mathcal{F}$ 에서와 마찬가지로 연산을 정의하면 벡터 공간을 이룬다. 특히, 후술할 개념인 $\mathcal{F}$ 의 부분공간을 이룬다.
- 다항식들의 모임 $\mathcal{P} := \{a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 : a_i \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}\}$ 도 마찬가지로 함수의 덧셈과 상수배를 정의하면 벡터 공간을 이룬다.

이외에도 다양한 벡터 공간들의 예시가 있으나, 우리는 우선 유클리드 공간을 중심으로 다룬다.

정의 2. 부분공간 (Subspace) 벡터 공간 V 의 부분집합 $W \subset V$ 가 V 의 연산을 W 로 제한하여 벡터 공간의 조건을 만족하면 W 를 V 의 부분공간이라 하고, $W \leq V$ 로 표기한다.

명제 1. 부분공간 판별법 벡터 공간 V 의 부분집합 $W \subset V$ 의 임의의 원소 w_1, w_2 와 $c \in F$ 대하여 $w_1 - cw_2 \in W$ 가 성립함은 $W \leq V$ 와 동치이다.

예제 3. 선형 방정식의 해 공간 두 벡터 $(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ 가 방정식 $x + y - z = 0$ 의 임의의 해라고 하자. 그러면, 임의의 상수 $c \in \mathbb{R}$ 에 대해 다음이 성립한다:

$$x_1 - cy_1 + x_2 - cy_2 - x_3 + cy_3 = (x_1 + x_2 - x_3) + c(y_1 + y_2 - y_3) = 0 + c \cdot 0 = 0.$$

따라서, 방정식 $x + y - z = 0$ 의 해집합

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 0\} \subset \mathbb{R}^3$$

은 부분공간을 이룬다.

정의 3. 일차 독립 집합 (Linearly Independent Set) 벡터 공간 V 의 부분집합 $S = \{v_1, \dots, v_k\}$ 가 다음을 만족하면, S 는 일차 독립 (linearly independent)하다고 한다:

$$c_1 v_1 + \dots + c_k v_k = 0 \text{ 의 필요충분조건은 모든 } c_i \text{가 } 0 \text{인 것이다.}$$

정의 4. 생성 부분공간 (Spanned Subspace) 벡터 공간 V 의 부분집합 S 를 포함하는 가장 작은 부분공간을 S 에 의해 생성된 부분공간이라 하며, $\langle S \rangle$ 로 표기한다. 이때, S 를 생성집합 (generating set, spanning set)이라 한다. 여기서 "가장 작은 부분공간"이란 S 를 포함하는 모든 부분공간의 교집합으로 정의된다.

명제 2. 생성 부분집합의 표현 집합 S 로부터 생성된 부분공간 $\langle S \rangle$ 는 다음과 같이 모든 S 의 원소들의 유한 선형 결합으로 표현된다:

$$\langle S \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^n c_i s_i : c_i \in F, s_i \in S, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

여기서 c_i 는 체 F 의 원소이고, s_i 는 S 의 원소이며, 합은 유한합을 의미한다.

정의 5. 기저 (Basis) 일차독립인 집합 $\mathcal{B}$ 가 V 를 생성하면 $\mathcal{B}$ 를 V 의 기저 (Basis)라 한다.

예제 4. 유클리드 공간의 기저 i 번째 성분이 1이고 나머지는 0인 단위 벡터 $e_i \in \mathbb{R}^n$ 들의 모임 $\{e_1, \dots, e_n\}$ 은 $\mathbb{R}^n$ 의 기저이다. 이 경우를 표준 기저 (standard basis)라 한다.

정의 6. 선형 사상 (Linear Map) 두 벡터 공간 V, W 사이의 함수 $L : V \rightarrow W$ 가 다음 조건을 만족하면 선형 사상 (Linear map)이라고 한다:

임의의 $u, v \in V, c \in F$ 에 대하여 $L(u + cv) = L(u) + cL(v)$ 가 성립한다.

즉, 벡터 공간에서 연산을 수행한 후 선형 사상을 적용한 결과와, 선형 사상을 먼저 적용한 후 연산을 수행한 결과가 동일하다.

예제 5. 사영 (Projection) 벡터 공간 V 의 부분공간 $W \leq V$ 를 생각하자. 그러면 사영 함수 $P_W : V \rightarrow V$ 를 다음과 같이 정의할 수 있다:

$$P_W(v) := \operatorname{argmin}_{w \in W} \|v - w\|,$$

이는 v 로부터 W 내의 점까지의 거리 $\|v - w\|$ 를 최소화하는 점 w 를 찾는 것이다. 이제 $w_u = \operatorname{argmin}_{w_u \in W} \|u - w_u\|$, $w_v = \operatorname{argmin}_{w_v \in W} \|v - w_v\|$ 라고 하자. $P_W(u + cv)$ 의 값을 찾기 위해 다음 거리를 고려하자:

$$\|u + cv - w\|^2 = \|u - w_u + c(v - w_v) + (w_u - cw_v - w)\|^2.$$

사영의 성질을 이용하면, 다음 식이 성립한다:

$$\|u + cv - w\|^2 \leq \|u - w_u\|^2 + c^2 \|v - w_v\|^2 + c \|u - w_u\| \|v - w_v\| + \|w_u - cw_v - w\|^2.$$

이 값은 $w = w_u + cw_v$ 일 때 최소가 된다. 따라서,

$$P_W(u + cv) = w_u + cw_v = P_W(u) + cP_W(v).$$

이를 통해 L_W 가 선형 사상임을 알 수 있다.

정리 1. 선형 확장 정리 (Linear Extension Theorem) 선형 사상 $L : V \rightarrow W$ 의 정의역 전체에서의 함숫값은 V 의 기저에서의 값으로 완전히 결정된다. $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ 를 V 의 기저라고 하자. 그러면 V 의 임의의 원소는 다음과 같은 형태로 유일하게 표현된다:

$$c_1 v_1 + \dots + c_n v_n.$$

따라서,

$$L(c_1 v_1 + \dots + c_n v_n) = c_1 L(v_1) + \dots + c_n L(v_n)$$

이므로, L 의 함숫값은 기저에서의 값 $\{L(v_i)\}_{i=1, \dots, n}$ 의 선형 결합으로 표현할 수 있다.

예제 6. 사영 (Projection) 예제 5에서 정의된 사영 P_W 를 생각하자. 부분공간 $W \leq V$ 도 벡터 공간이므로, 기저를 갖는다. W 의 기저를 $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_k\}$ 라고 하자. 그러면, $\mathcal{W}$ 를 부분집합으로 포함하는 V 의 기저 $\mathcal{B} = \{w_1, \dots, w_n\}$ 를 각각의 $w_i, i = k+1, \dots, n$ 가 $\mathcal{W}$ 에 수직이 되도록 만족시킬 수 있다. (정리 9 참고.) 그러면 다음이 성립한다:

$$P_W(w_i) = w_i \quad i = 1, \dots, k, \quad P_W(v) = 0 \quad (\text{모든 } v \in \langle \mathcal{W}^c \rangle).$$

반대로, 일차 독립인 집합 $S = \{s_1, \dots, s_k\}$ 가 주어졌을 때, 다음과 같이 정의할 수 있다:

$$P_S(s_i) = s_i \quad i = 1, \dots, k, \quad P_S(v) = 0 \quad (\text{모든 } v \in \langle S \rangle^\perp).$$

이 정의에 따르면 P_S 는 사영 $P_{\langle S \rangle}$ 임을 알 수 있다.

정의 7. 행렬 (Matrix) 크기 $m \times n$ 행렬은 m 개의 행과 n 개의 열을 갖는 원소로 구성된 배열이다. 표기는 다음과 같다:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

행렬들을 모아놓은 집합은 각 성분별 덧셈과 상수배를 정의하면 벡터 공간을 이룬다. 실수를 성분으로 갖는 크기 $m \times n$ 행렬들의 모임을 $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ 로 표기하자. 크기 $m \times n$ 행렬 A 와 크기 $n \times k$ 행렬 B 의 곱셈 연산은 다음과 같이 정의된다:

$$AB = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1k} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mk} \end{pmatrix}.$$

여기서 각각의 c_{ij} 는 A 의 i -번째 행과 B 의 j -번째 열의 각 성분을 곱한 뒤 더한 값이다. 이를 수식으로 나타내면 다음과 같다:

$$c_{ij} = \sum_{l=1}^n a_{il} b_{lj}.$$

$\mathbb{R}^n$ 의 원소 $v = (v_i)_{i=1,\dots,n}$ 를 $n \times 1$ 열벡터로 간주하면, $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ 과의 곱셈 연산을 통해 $\mathbb{R}^m$ 의 원소

$$Av = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n a_{1i}v_i \\ \sum_{i=1}^n a_{2i}v_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_{mi}v_i \end{pmatrix}$$

을 얻을 수 있다. 또한, 임의의 $u, v \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$ 에 대해 $A(u + cv) = Au + cAv$ 가 성립한다. 따라서, 행렬 A 는 선형사상 $L_A : V \rightarrow W$, $L_A(v) := Av$ 를 정의한다. 이러한 행렬 A 를 선형사상 L_A 로 보내는 사상을 $\Psi : \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R}) \rightarrow L(V, W)$ 로 표기하자.

정리 2. 선형대수학의 기본 정리 모든 선형 사상 $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ 은 행렬 $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ 에 의해 표현되는 $\Psi(A)$ 와 일대일 대응한다. 이 일대일 대응은 선형 사상이다. 또한, 선형 사상 $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ 과 $\tilde{T} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ 에 각각 대응되는 $\Psi(A)$, $\Psi(B)$ 가 있을 때, $\tilde{T} \circ T = \Psi(B)\Psi(A)$ 가 성립한다.

증명

1. 선형 사상 $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ 에 대해 $T(e_i) \in \mathbb{R}^m$ 은 m -차원 열벡터이다. 이러한 열벡터를 모아 행렬 $\Phi(T) := (T(e_1), \dots, T(e_n))$ 를 정의한다. 정의 7에서 행렬이 선형 사상을 정의한다는 사실을 이용하면 $\Psi(\Phi(T))(e_i) = T(e_i)$ 가 성립한다. 선형 확장 정리에 의해 기저에서의 값이 일치하면 선형 사상이 일치하므로 $\Psi(\Phi(T)) = T$ 임을 알 수 있다. 따라서 임의의 선형 사상 T 에 대해 이에 대응하는 행렬 $\Phi(T)$ 가 존재한다.
2. 이제 두 행렬 $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ 가 서로 다르다고 가정하자. 어떤 인덱스 l, k 에 대해 $a_{lk} \neq b_{lk}$ 가 존재한다. 그러면 다음이 성립한다:

$$\Psi(A)(e_k) = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{lk} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} b_{1k} \\ \vdots \\ b_{lk} \\ \vdots \\ b_{mk} \end{pmatrix} = \Psi(B)(e_k).$$

따라서, 서로 다른 두 행렬이 표현하는 선형 사상은 서로 다르다.

4. 위의 결과에 의해 $L : \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R}) \rightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ 는 전단사 함수임을 알 수 있다. 여기서 $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ 은 $\mathbb{R}^n$ 에서 $\mathbb{R}^m$ 으로 가는 모든 선형 사상들의 집합이다. 이 집합 또한 벡터 공간을 이룬다. L 의 역함수는 Φ 임을 쉽게 확인할 수 있으며, Φ 와 L 가 모두 선형 사상임도 확인할 수 있다:

$$\Phi(T + c\tilde{T}) = \Phi(T) + c\Phi(\tilde{T}), \quad \Psi(A + cB) = \Psi(A) + c\Psi(B).$$

5. 마지막으로, L 이 행렬의 곱 연산을 선형 사상의 합성으로 변환함을 보이자. 선형 사상 $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\tilde{T} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ 에 대응하는 행렬이 각각 A, B 라고 하자. 그러면

$$BAe_i = B \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{l=1}^m b_{1l}a_{li} \\ \vdots \\ \sum_{l=1}^m b_{kl}a_{li} \end{pmatrix}.$$

여기서 $a_{li} = \Phi(T)_{li}$, $b_{kl} = \Phi(\tilde{T})_{kl}$ 이므로, 이 값은 $\tilde{T} \circ T(e_i)$ 와 일치한다. 따라서 BA 는 $\tilde{T} \circ T$ 에 대응한다.

예제 7. 사영 (Projection) $\mathbb{R}^n$ 에서 일차 독립인 집합 $S = \{v_1, \dots, v_k\}$ 를 생각하자. 이 집합을 포함하는 $\mathbb{R}^n$ 의 기저 $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ 를 고려하자. (예제 6에서와 같이 $v_{k+1}, \dots, v_n$ 들은 S 에 직교한다고 가정한다.) 기저의 각 원소는 표준 기저의 선형 결합으로 표현될 것이다. 즉, $v_i = v_{1i}e_1 + \dots + v_{ni}e_n$ 이다. 표준 기저를 $\mathcal{B}$ 로 옮기는 선형 사상을 행렬로 표현하면 다음과 같다:

$$B = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \cdots & v_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n1} & v_{n2} & \cdots & v_{nn} \end{pmatrix}.$$

이제 $P_{\langle S \rangle}$ 은 각각의 v_i 를 예제 6에서와 같은 규칙으로 사영한다. 따라서 다음이 성립한다:

$$P_{\langle S \rangle} \circ \Psi(B)(e_i) = v_i \quad (\text{각 } i = 1, \dots, k),$$

$$P_{\langle S \rangle} \circ \Psi(B)(e_i) = 0 \quad (\text{각 } i = k+1, \dots, n).$$

정리 2에 의해 $P_{\langle S \rangle} \circ \Psi(B)$ 의 행렬 표현은 다음과 같다:

$$\Phi(P_{\langle S \rangle} \circ \Psi(B)) = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1k} & 0 & \cdots & 0 \\ v_{21} & v_{22} & \cdots & v_{2k} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 0 & \cdots & 0 \\ v_{n1} & v_{n2} & \cdots & v_{nk} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

또한, 정리 2에 의해 $\Phi(P_{\langle S \rangle} \circ \Psi(B)) = \Phi(P_{\langle S \rangle})\Phi(\Psi(B))$ 이므로,

$$\Phi(P_{\langle S \rangle}) = \Phi(P_{\langle S \rangle} \circ \Psi(B))B^{-1}$$

임을 알 수 있다. 여기서 $B^{-1} = \Phi(\Psi(B)^{-1})$ 이다.

정의 8. 핵 (Kernel)과 상 (Image) 선형 사상 $L : V \rightarrow W$ 에 대해 핵(kernel) $\text{Ker}L$ 과 상(image) $\text{Im}L$ 를 다음과 같이 정의한다:

$$\text{Ker}L := \{v \in V : L(v) = 0\},$$

$$\text{Im}L := \{L(v) : v \in V\}.$$

이때 핵과 상 모두 각각 V 와 W 의 부분공간이 됨을 알 수 있다.

정의 9. 동형 사상 (Isomorphism) 선형 사상 $L : V \rightarrow W$ 에 대해 다음과 같은 정의를 할 수 있다.

- L 의 핵이 영공간일 경우 단사 사상(monomorphism)이라 한다.
- L 의 상이 W 일 경우 전사 사상(epimorphism)이라 한다.
- L 이 전사 사상인 동시에 단사 사상일 경우 동형 사상(isomorphism)이라 한다.

Remark

- 해당 정의들은 다른 수학 구조들에도 동일하게 사용된다. 다만, 동형 사상의 경우 역사상이 구조를 보존한다는 보장이 없기에 이를 확인하여야 한다. 대표적인 예시로 위상 공간 사이의 연속함수가 있다. (e.g. $f : [0, 2\pi) \rightarrow S^1$, $f(\theta) = (\cos(\theta), \sin(\theta))$)
- $\Psi(A)$ 가 동형 사상일 경우 A 를 가역 행렬이라 한다.

정의 10. 차원 (Dimension) 벡터 공간 V 의 기저 집합의 크기를 차원(dimension)이라 한다. 표기는 $\dim V$ 로 한다.

Remark 우리는 유한 차원 벡터 공간만을 다룰 것이다.

정리 3. 차원의 유일성 벡터 공간 V 의 차원은 잘 정의된다. (well-defined)

증명 크기가 서로 다른 V 의 기저 $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$, $\mathcal{C} = \{w_1, \dots, w_m\}$ 가 있다고 하자. $m > n$ 일 때에, $\mathcal{C}$ 의 원소들을 $\mathcal{B}$ 의 선형결합으로 표현하자:

$$\begin{aligned} w_1 &= a_{11}v_1 + \dots + a_{1n}v_n, \\ &\vdots \\ w_m &= a_{m1}v_1 + \dots + a_{mn}v_n. \end{aligned}$$

그러면, 방정식 $c_1w_1 + \dots + c_mw_m = 0$ 은 다음과 같이 다시 쓸 수 있다:

$$(c_1a_{11} + \dots + c_ma_{m1})v_1 + \dots + (c_1a_{1n} + \dots + c_ma_{mn})v_n = 0.$$

$\mathcal{B}$ 는 기저이므로, 이 방정식은 다음과 동치이다:

$$\begin{aligned} a_{11}c_1 + \dots + a_{m1}c_m &= 0, \\ &\vdots \\ a_{1n}c_1 + \dots + a_{mn}c_m &= 0. \end{aligned}$$

해당 연립방정식은 변수의 개수보다 방정식의 개수가 적으므로 비자명한 해 $(c_1, \dots, c_m)$ 가 존재한다. 따라서, 귀류법에 의해 두 기저의 크기가 다르다는 가정은 틀렸다.

명제 3. 일차 독립 집합의 확장 일차 독립 집합 S 가 생성하는 부분공간 $\langle S \rangle$ 이 벡터 공간 V 의 진부분집합이라 하자. 그러면, S 를 진부분집합으로 포함하는 일차 독립 집합 S' 가 존재한다.

증명 $S = \{v_1, \dots, v_k\}$ 라 하자. $w \in \langle S \rangle^c$ 이면, $c_1v_1 + \dots + c_kv_k + cw = 0$ 이 만족되려면 모든 계수가 0이어야 한다.

정리 4. 기저 확장 정리 (Basis Extension Theorem) 벡터 공간 V 의 일차 독립인 부분집합 S 를 포함하는 기저가 존재한다.

증명 명제 3의 증명에서의 루틴(생성 부분공간의 여집합에서 원소를 하나 택해오는 것)을 반복하면 된다. 정리 3에 의해, 이 루틴은 확장된 집합이 기저가 될 때 까지 반복할 수 있다.

정리 5. 차원 정리 (Dimension Theorem) 두 벡터 공간 V, W 사이의 선형사상 $L: V \rightarrow W$ 에 대해 다음 식이 성립한다:

$$\dim(\text{Ker}L) + \dim(\text{Im}L) = \dim V.$$

증명 $\text{Ker}L$ 의 기저를 $\{v_1, \dots, v_k\}$ 라 하자. 정리 4에 의해 이는 V 의 기저 $\{v_1, \dots, v_n\}$

으로 확장된다. 이제, $\langle \{L(v_{k+1}), \dots, L(v_n)\} \rangle = \text{Im}L$ 은 명확하므로, 일차 독립인 것만 보이면 된다. $c_{k+1}L(v_{k+1}) + \dots + c_nL(v_n) = L(c_{k+1}v_{k+1} + \dots + c_nv_n)$ 이므로, $c_{k+1} = \dots = c_n = 0$ 이어야 한다. 따라서, $\dim(\text{Ker}L)=k$, $\dim(\text{Im}L)=n-k$ 이므로 원하는 결론을 얻는다.

Remark $\dim(\text{Im}L)$ 을 L 의 랭크(Rank)라고 하며, $\text{rk}(L)$ 로 표기한다.

지금까지의 내용을 응용하면 다음과 같은 사실들을 알 수 있다:

- 유한차원 벡터 공간은 선형 구조만 따졌을 때에 차원으로 모두 분류가 된다. (정리 3)
- $L: V \rightarrow V$ 가 단사, 전사, 동형 사상임은 모두 동치이다. (정리 5)

이제, 주어진 벡터 공간을 기반으로 새로운 벡터 공간을 구성하는 방법들을 몇 가지 알아보자.

정의 11. 직합 (Direct Sum) 벡터 공간 V 의 부분 공간 W_1, W_2 에 대해 두 공간의 합을 $W_1 + W_2 := \{w_1 + w_2 : w_1 \in W_1, w_2 \in W_2\}$ 로 정의하고, $W_1 \cap W_2 = \{\emptyset\}$ 일 경우, 직합(direct sum)이라 칭하며 기호로는 $W_1 \oplus W_2$ 로 표기한다.

정의 12. 직접곱 (Direct Product) 벡터 공간 V, W 가 있을 때에 두 집합의 직접곱(direct product)를 다음과 같이 정의한다:

$$V \times W := \{(v, w) : v \in V, w \in W\}.$$

이때, 해당 공간의 각 성분에 대해 V 와 W 의 연산을 빌려와서 정의한다.

정의 13. 몫공간 (Quotient Space) 벡터 공간 V 와 부분공간 $W \leq V$ 가 있을 때에, 몫공간 V/W 를 다음과 같이 정의한다:

$$V/W := V / \sim, \text{ where } u \sim v \iff u - v \in W.$$

예제 8. 정의 11, 12, 13의 예시들

- 선형 사상 $L : V \rightarrow W$ 가 있을 때에 몫공간 $V/\text{Ker}L$ 을 생각할 수 있다. 이 공간은 정리 5의 증명의 논리를 따라가면 $\text{Im}L$ 과 동형임을 알 수 있다.
- 사상 $q : V \rightarrow V/\text{Ker}L$ 을 통해 $V/\text{Ker}L$ 의 기저를 V 의 어떤 부분공간 $\overline{V/\text{Ker}L}$ 의 기저로 옮길 수 있다. 이때 $V = \text{Ker}L \oplus \overline{V/\text{Ker}L}$ 임을 알 수 있다.
- 마찬가지로, $L : V \rightarrow W$ 에 대해 몫공간 $W/\text{Im}L$ 을 생각할 수 있고, $p : W \rightarrow W/\text{Im}L$ 을 통해 이 공간의 기저를 W 의 어떤 부분공간 $\overline{W/\text{Im}L}$ 의 기저로 옮길 수 있고, $W = \text{Im}L \oplus \overline{W/\text{Im}L}$ 임을 알 수 있다. (Remark $W/\text{Im}L$ 을 $\text{Coker}L$ 로 표기한다.)
- $V = \text{Ker}L \oplus \overline{V/\text{Ker}L} \simeq \text{Ker}L \times V/\text{Ker}L$, $W = \text{Im}L \oplus \overline{W/\text{Im}L} \simeq \text{Im}L \times \text{Coker}L$ 임을 알 수 있다.
- $V \oplus W \simeq V \times W$.
- $\dim(V \times W) = \dim V + \dim W$, $\dim(V/W) = \dim V - \dim W$ 이다. 따라서, 직접곱은 벡터 공간의 덧셈, 몫공간은 벡터 공간의 뺄셈에 해당한다고 볼 수 있다. (공간의 곱셈에 해당하는 건 무엇일까?)

벡터 공간의 경우 차원으로 완전히 동치인 공간들이 분류되고, 그 분류와 구조는 매우 간단하다는 것을 알 수 있다. 그렇다면, 벡터 공간의 구조를 보존하는 선형 사상들의 분류도 간단할까? 이에 대해 간략하게 알아보도록 하자.

정의 14. 선형 사상의 표현 정리 2의 증명 과정을 보면 선형 사상을 행렬로 표현할 때에 특정 기저(표준 기저)가 사용 됐음을 알 수 있다. 이러하듯 선형 사상을 행렬로 표현할 때에는 특정 기저를 기준으로 삼아야 하는데 구체적으로 다음과 같은 선형 사상을 생각하자:

$$\alpha_{\mathcal{B}} : V \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\alpha_{\mathcal{B}}(v) := (c_1, \dots, c_n), \quad \text{where } v = c_1 v_1 + \dots + c_n v_n.$$

여기서 $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ 은 V 의 기저이다. 기저의 성질에 의해 $\alpha_{\mathcal{B}}$ 가 잘 정의됐음을 알 수 있고, 해당 사상의 선형성 또한 쉽게 확인할 수 있다. 선형 사상 $L : V \rightarrow W$ 와 W 의 기저 $\mathcal{C} = \{w_1, \dots, w_m\}$, 그리고 $\alpha_{\mathcal{C}}$ 을 생각하자. $L(v_i) = a_{1i}w_1 + \dots + a_{mi}w_m$ 이라 할 때에 우리는 다음 식을 얻는다:

$$L(v) = \alpha_{\mathcal{C}}^{-1} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \alpha_{\mathcal{B}}(v).$$

여기서 가운데의 행렬이 해당 기저들에서의 선형 사상의 행렬 표현이다. 이를 $[L]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$ 로 표기하자. 해당 표현을 이용해서도 정리 2를 동일하게 증명할 수 있다. 이제 특수하게 $V = W = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{B} = \mathcal{C}$ 의 경우를 따져보자. 그러면 $\Phi(\alpha_{\mathcal{B}}^{-1}) = (v_1 v_2 \dots v_n) = B$ 이 되고, $\Phi(\alpha_{\mathcal{B}}) = B^{-1}$ 이므로, $L(v) = B[L]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}B^{-1}v$ 가 된다. 선형 사상의 값 자체는 기저에 의존하지 않으므로, $[L]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} = \Phi(L) = B[L]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}B^{-1} = \Phi(\alpha_{\mathcal{B}})[L]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}\Phi(\alpha_{\mathcal{B}})^{-1}$ 임을 알 수 있다.

정의 14를 착안하여 다음과 같은 정의를 할 수 있다.

정의 15. 행렬의 닮음 (Similarity of Matrix) $n \times n$ 행렬 A 와 B 에 대해 $PAP^{-1} = B$ 를 만족시키는 가역행렬 P 가 존재하면 두 행렬이 서로 닮음이라고 한다. 표기는 $A \sim B$ 으로 한다.

명제 4. 닮은 행렬의 성질 두 정사각행렬 A, B 가 닮으면 다음이 성립한다.

- $\text{rk}(\Psi(A)) = \text{rk}(\Psi(B))$.
- $\dim(\text{Ker}(\Psi(A))) = \dim(\text{Ker}(\Psi(B)))$.
- A 가 가역 행렬인 것과 B 가 가역 행렬인 것은 동치.

Remark 위 명제에 의해 우리는 행렬의 랭크를 정의할 수 있다.

정의 16. 행렬식 (Determinant) 표준 기저 $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$ 에서 자기자신으로 가는 전단사 함수는 선형 확장 정리에 의해 행렬을 하나 정의한다. 예를 들어 $L(e_1) = e_1, L(e_2) = e_3, L(e_3) = e_2$ 이면, 이것의 행렬 표현은 다음과 같다:

$$\Phi(L) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

그러면 이제 이러한 표준 기저의 순서를 바꾸는 행렬들에 대해 부호를 정의할 수 있다. 행렬의 행을 홀수 번 바뀌서 항등 행렬로 만들 수 있다면 $\text{sgn}(L) := -1$, 짝수 번이라면 $\text{sgn}(L) := 1$ 로 정의하자. (해당 정의가 잘 정의됨을 확인하시오.) 표준 기저의 순서를 바꾸는 이러한 선형 사상들을 모두 모아놓은 집합을 $\mathcal{L}$ 이라 하자. 그러면 $n \times n$ 행렬 A 의 행렬식은 다음과 같이 정의한다:

$$\det A := \sum_{L \in \mathcal{L}} \text{sgn}(L) \prod_{i=1}^n (L(e_i) \cdot \Psi(A)(e_i)).$$

명제 5. 행렬식의 성질 행렬식은 다음과 같은 성질을 만족한다:

- $\det I = 1$.
- $\det(AB) = \det A \det B$.
- A 가 가역행렬이 아니면 $\det A = 0$.
- $A \sim B$ 이면 $\det A = \det B$

증명 명제 7 참고.

예제 8. 사영 (Projection) 사영 $P_W : V \rightarrow V$ 을 생각하자. W 의 기저를 V 의 기저 $\mathcal{B}$ 로 직교하도록 확장하면, 사영의 해당 기저에 대한 표현은 다음과 같다:

$$[P_W]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

정의 17. 행렬의 대각화 (Diagonalization of Matrix) 대각 성분을 제외한 성분이 모두 0인 행렬을 대각 행렬(diagonal matrix)라 하며, 대각 행렬과 닮은 행렬은 대각화 가능(diagonalizable)하다고 한다. 대각화 가능한 행렬을 대각화 하였을 때에 표현은 유일하며, 이때의 대각 성분들을 특성값(eigenvalue)라고 한다. 행렬 A 가 고윳값 λ 를 가질 때에 $Av = \lambda v$ 를 만족하는 0이 아닌 벡터를 고유 벡터(eigenvector)라고 한다.

정의 18. 동치 관계 (Equivalent Relation) 집합 X 위의 동치 관계 $R \subseteq X \times X$ 는 다음을 만족하는 $X \times X$ 의 부분집합이다.

- (반사 관계) $x \in X$ 에 대해, $x \sim x$.
- (대칭 관계) $x \sim y \leftrightarrow y \sim x$.
- (추이적 관계) $x \sim y, y \sim z \rightarrow x \sim z$.

여기서, $x \sim y$ 는 $(x, y) \in R$ 을 의미한다. 혼동의 여지가 없을 때 동치 관계를 $\sim$ 으로 표기한다.

Remark 임의의 $X \times X$ 의 부분집합은 이항 관계(binary relation)이라 하며, 동치 관계는 이항 관계중 특수한 경우이다.

정의 19. 동치류 (Equivalent Class) X 에 동치 관계 $\sim$ 가 있을 때에 동치류란 다음과 같이 정의된다:

$$\bar{x} := \{y \in X : x \sim y\}.$$

정의 20. 몫집합 (Quotient Set) 동치 관계가 주어졌을 때 동치류들의 모임을 몫집합이라 하며, 다음과 같이 표기한다:

$$X / \sim := \{\bar{x} : x \in X\}.$$

예제 9. 정수 집합 $\mathbb{Z}$ 에 다음과 같은 동치류를 생각하자:

$$n \sim m \leftrightarrow n \equiv m \pmod{N}.$$

N 은 고정된 어떤 자연수이고, 우변의 식의 의미는 N 으로 나누었을 때에 나머지가 같다는 것을 기호로 표기한 것이다.

$$n - n = 0 \equiv 0 \pmod{N} \rightarrow n \sim n,$$

$$n \sim m \rightarrow n - m = kN \text{ for some } k \in \mathbb{Z} \rightarrow m - n = -kN \rightarrow m \sim n.$$

$$n \sim m, m \sim l \rightarrow n - m + m - l = k_1N + k_2N = (k_1 + k_2)N \rightarrow n \sim l.$$

따라서, 해당 이항 관계는 동치 관계이며 다음과 같은 몫집합을 정의한다:

$$\mathbb{Z}/\sim = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{N-1}\}$$

예를 들어, $\bar{i} = \{\dots, -2N + i, -N + i, i, N + i, 2N + i, \dots\}$ 임을 알 수 있다.

정의 21. 분할 (Partition) 집합 X 의 분할이란 X 를 서로 겹치지 않는 부분집합으로 나눈 것이다.

정리 6. 분할과 동치 관계 집합 X 의 분할 $\mathcal{P} = \{X_1, \dots, X_p\}$, $X = \coprod_{i=1}^p X_i$ 을 생각하자. 다음과 같은 이항 관계를 생각하자:

$$x \sim y \leftrightarrow x, y \in X_i \text{ for some } i.$$

그러면 이 관계는 동치 관계가 된다. 반대로, 동치류들의 모임인 몫집합은 집합의 분할로 볼 수 있다.

정의 22. 쌍선형 형식 (Bilinear Form) 함수 $B : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ 이 각각의 성분에 대해 선형성을 만족하면 쌍선형 형식이라 한다. 구체적으로 다음과 같은 조건이다:

$$\text{for all } \forall u, v, w \in V \text{ and } a \in \mathbb{R}, B(au + v, w) = aB(u, w) + B(v, w),$$

$$\text{for all } \forall u, v, w \in V \text{ and } a \in \mathbb{R}, B(u, av + w) = B(u, v) + aB(u, w),$$

정리 7. 쌍선형 형식의 행렬 표현 쌍선형 형식 $B : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ 은 행렬로 다음과 같이 표현할 수 있다:

$$B(u, v) = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1n} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{n1} & B_{n2} & \cdots & B_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

여기서, $V = \mathbb{R}^n$, $B_{ij} = B(e_i, e_j)$ 이다.

증명

$$\begin{aligned} B(u, v) &= B\left(\sum_{i=1}^n u_i e_i, \sum_{j=1}^n v_j e_j\right) = \sum_{i,j=1}^n u_i v_j B(e_i, e_j) \\ &= \sum_{i=1}^n u_i \left(\sum_{j=1}^n B_{ij} v_j\right). \end{aligned}$$

정의 23. 대칭 쌍선형 형식 (Symmetric Bilinear Form) 쌍선형 형식 $B : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ 가 다음을 만족할 경우 대칭 쌍선형 형식이라 한다:

$$\forall u, v \in V, \quad B(u, v) = B(v, u).$$

예제 10. 이차 형식 (Quadratic Form)

- 대칭 쌍선형 형식의 행렬 표현은 대칭 행렬이다. ($a_{ij} = a_{ji}$)
- 이차 형식 $ax^2 + 2bxy + cy^2$ 은 대칭 쌍선형 형식과 일대일 대응된다:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

정의 24. 내적 (Inner Product) 벡터 공간 $V = \mathbb{R}^n$ 의 내적 $B : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ 은 다음을 만족하는 대칭 쌍선형 형식이다:

- $v = 0 \Leftrightarrow B(v, v) = 0$.
- $0 \leq B(v, v) \quad \forall v \in V$.

이때 혼동의 여지가 없을 경우 내적을 $\langle u, v \rangle := B(u, v)$ 로 표기한다. 내적이 주어진 벡터 공간 $(V, \langle, \rangle)$ 을 내적 공간(inner product space)라 한다.

예제 11. 표준 내적 (Standard Inner Product) $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ 위의 함수 $\langle u, v \rangle = u_1v_1 + \dots + u_nv_n$ 는 내적이 되며 이를 표준 내적이라 한다. 표준 내적을 통해 유클리드 거리(Euclidean metric)와 유클리드 노름(Euclidean norm)을 정의할 수 있다:

$$\begin{aligned} \|u\| &= \sqrt{\langle u, u \rangle}, \\ d(u, v) &= \|u - v\|. \end{aligned}$$

정의 25. 직교 여공간 (Orthogonal Complement) 내적이 정의된 공간에서는 두 벡터의 직교(orthogonal)을 정의할 수 있다. $\langle u, v \rangle = 0$ 일 경우 u 와 v 가 서로 직교(u is orthogonal to v or vice versa)한다고 한다. 부분공간 $W \leq V$ 의 모든 원소에 직교하는 벡터들을 모아놓은 집합을 직교 여공간이라 하며 벡터 공간이 된다. 기호로는 $W^\perp$ 로 표기한다.

증명 $u, v \in W^\perp, c \in \mathbb{R}$ 일 때에, 모든 $w \in W$ 에 대해 $\langle cu + v, w \rangle = c\langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$ 따라서, $cu + v \in W^\perp$.

정리 8. 그람-슈미트 과정 (Gram-Schmidt Process) 일차 독립 집합 $S = \{v_1, \dots, v_l\}$ 이 있을 때, S 와 생성 공간이 동일한 정규 직교 집합(orthonormal set)을 찾을 수 있다.

증명 $e_1 := \frac{v_1}{\|v_1\|}$, $e_{k+1} := \frac{v_{k+1} - \sum_{i=1}^k \langle e_i, v_{k+1} \rangle e_i}{\|v_{k+1} - \sum_{i=1}^k \langle e_i, v_{k+1} \rangle e_i\|}$ 으로 정의하자. 해당 집합이 정규 직교 즉, 각 원소들이 서로 수직이며 크기가 모두 1임은 쉽게 확인할 수 있다.

정리 9. 직교 여공간의 성질 유한 차원 내적 공간 $(V, \langle, \rangle)$ 의 부분 공간 $W \leq V$ 에 대해 다음과 같은 성질들이 성립한다:

- $W \oplus W^\perp = V$.
- $(W^\perp)^\perp = W$.

증명 $w \in W^\perp \cap W$ 라 하자. 그러면, $\langle w, w \rangle = 0$ 이므로, $w = 0$. 따라서, $W \cap W^\perp = \{0\}$. 그람-슈미트 과정을 통해 W 의 기저 $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_k\}$ 를 하나 구성하자. 이제 기저 확장 정리를 통해 이 기저를 V 의 기저로 확장한 뒤 다시 그람-슈미트 과정을 통해 정규 직교 기저 $\mathcal{B} = \{w_1, \dots, w_n\}$ 을 구성하자. 그러면 다음이 성립하는데:

$$V = W \oplus \langle w_{k+1}, \dots, w_n \rangle = \langle w_1, \dots, w_k \rangle \oplus \langle w_{k+1}, \dots, w_n \rangle$$

$\langle w_{k+1}, \dots, w_n \rangle = W^\perp$ 을 보이면 첫번째 등식을 증명할 수 있다. 좌향의 공간이 우향의 부분 공간임은 자명하므로 반대의 경우를 보이자. $w \in W^\perp$ 라 할 때에 $w = \sum_{i=1}^n c_i w_i$ 인데, $c_i = \langle w, w_i \rangle = 0, i = 1, \dots, k$ 이므로, $W^\perp \leq \langle w_{k+1}, \dots, w_n \rangle$ 이다. 따라서, $\langle w_{k+1}, \dots, w_n \rangle = W^\perp$ 이고, $V = W \oplus W^\perp$.

$w \in W$ 라 하자. 그러면 임의의 $v \in W^\perp$ 에 대해 $\langle v, w \rangle = 0$ 이 성립한다. 따라서, $w \in (W^\perp)^\perp$. 반대로 $w' \in (W^\perp)^\perp$ 라 하자. $\langle w', w_i \rangle = 0, i = k+1, \dots, n$ 이므로 $w' \in W$ 이다. 따라서, $(W^\perp)^\perp = W$.

Remark

- 해당 정리에 의해 예제 6이 설명된다.
- 해당 정리는 무한 차원의 경우 반례가 있다. (e.g. 수열 공간 $\mathbb{A}$ 의 부분 공간중 유한개의 성분만 0이 아닌 집합을 W 라 하자. $W^\perp = \{0\}$ 이며, $(W^\perp)^\perp = \mathbb{A}$ 이 된다.)

정의 26. 수반 연산자 (Adjoint Operator) 내적 공간 $(V, \langle, \rangle_V)$, $(W, \langle, \rangle_W)$ 사이의 작용소 $L : V \rightarrow W$ 를 생각하자. 그러면 L 의 수반 연산자 $L^* : W \rightarrow V$ 는 다음과 같이 정의 된다:

$$\langle L(v), w \rangle_W = \langle v, L^*(w) \rangle_V.$$

$$\Psi(A) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{mn} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

일 때에 $\langle e_i, \Psi(A)^*(e_j) \rangle = \langle \Psi(A)(e_i), e_j \rangle$ 이므로,

$$\Phi(\Psi(A)^*) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}.$$

임을 알 수 있다. 이때 행렬 A 의 전치 행렬 A^T 를 $A^T := \Phi(\Psi(A)^*)$ 로 정의한다.

정의 27. 직교 연산자 (Orthogonal Operator), 자기 수반 연산자 (Self-adjoint Operator) 내적 공간 $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ 에 정의된 선형 사상 $L : V \rightarrow V$ 에 대해 다음과 같은 정의들이 있다:

- $L^{-1} = L^*$ 일 경우, L 을 직교 연산자라고 한다.
- $L = L^*$ 일 경우, L 을 자기 수반 연산자라고 한다.
- 행렬 A 가 $A^{-1} = A^T$ 를 만족할 경우 직교행렬(orthogonal matrix)라 한다.
- 행렬 A 가 $A^T = A$ 를 만족할 경우 대칭행렬(symmetric matrix)라 한다.

명제 6. 직교 연산자의 성질 직교 연산자 $L : V \rightarrow V$ 는 다음과 같은 성질들을 갖는다:

- $\langle Lv, Lw \rangle = \langle v, w \rangle$.
- $\langle Le_i, Le_j \rangle = \delta_{ij}$ 따라서, $\Psi(L)$ 의 열벡터들은 정규 직교 기저를 이룬다.
- $(L^{-1})^{-1} = L = (L^T)^T = (L^{-1})^T$. 따라서, L^{-1} 도 직교 연산자.
- 직교 연산자의 합성도 직교 연산자이다.
- 직교 연산자들의 모임은 군을 이룬다.

예제 10. 2×2 직교 실행렬 크기가 2×2 인 직교 실행렬들의 집합 $O(2; \mathbb{R})$ 은 다음과 같다:

$$O(2; \mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} : \theta \in \mathbb{R} \right\} \sqcup \left\{ \begin{pmatrix} -\sin \theta & \cos \theta \\ \cos \theta & \sin \theta \end{pmatrix} : \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

이 사실은 계산을 통해 쉽게 도출할 수 있다. 이때, 우변의 첫번째 집합에 속하는 행렬들을 회전행렬(rotation matrix)이라 하며, 두번째 집합에 속하는 행렬들을 반사행렬(reflection matrix)라고 한다. 행렬식 $\det : GL(2; \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^\times$ 은 군준동형 사상이 되는데, 이를 $O(2; \mathbb{R})$ 에 제약을 하면 다음과 같은 준동형 사상을 얻는다:

$$\det : O(2; \mathbb{R}) \rightarrow Z_2 = \{1, -1\}$$

이때, $\ker \det$ 는 회전행렬들의 모임이 된다는 것을 알 수 있으며, 따라서 회전행렬들의 모임 $SO(2; \mathbb{R})$ 또한 군을 이룬다.

예제 11. 등거리변환 등거리변환이란 임의의 $u, v \in V$ 에 대해 $\|L(u) - L(v)\| = \|u - v\|$ 를 만족하는 $L : V \rightarrow V$ 를 말한다. $V = \mathbb{R}^n$ 일 때에 임의의 등거리변환은 어떤 $v_0 \in V$, $A \in O(n; \mathbb{R})$ 가 있어서 다음과 같은 꼴로 표현된다:

$$L(v) = Av + v_0.$$

$\tilde{L} := L - L(0)$ 로 정의하자. 그러면,

$$\begin{aligned} & \|\tilde{L}(u+v) - \tilde{L}(u) - \tilde{L}(v)\|^2 \\ &= \|\tilde{L}(u+v)\|^2 + \|\tilde{L}(u)\|^2 + \|\tilde{L}(v)\|^2 - 2\langle \tilde{L}(u+v), \tilde{L}(u) \rangle \\ & \quad - 2\langle \tilde{L}(u+v), \tilde{L}(v) \rangle + 2\langle \tilde{L}(u), \tilde{L}(v) \rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

$\tilde{L}$ 이 내적을 보존한다는 점을 이용하면 위의 식을 쉽게 보일 수 있다. 비슷한 방식으로 $\tilde{L}(cu) = c\tilde{L}(u)$ 임을 보일 수 있다. 따라서, $\tilde{L}$ 은 선형 사상이 된다. 특히, $\langle \tilde{L}(u), \tilde{L}(v) \rangle = \langle u, v \rangle$ 이므로 $\Phi(\tilde{L}) \in O(n; \mathbb{R}^b)$ 이다. 일반적인 행렬 A 와 벡터 v_0 대해 $L(v) = Av + v_0$ 와 같은 사상을 아핀 변환(affine transformation)이라고 한다.

예제 12. $O(1, 3)$ $O(n; \mathbb{R}^b)$ 은 표준 내적하에서 거리를 보존하는 선형 사상(행렬)들의 모임으로 생각할 수 있으며 다음과 같이 표현할 수 있다:

$$O(n; \mathbb{R}^b) := \{A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R}) : A^T I A = I\}.$$

위 집합의 정의에서 표준 내적에 해당하는 A^T 와 A 사이의 행렬 I 를 다음 행렬로 바꾼 경우의 집합을 $O(1, n-1)$ 으로 표기하자:

$$\tilde{I} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$O(1, n-1) := \{A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R}) : A^T \tilde{I} A = \tilde{I}\}.$$

그러면 $\tilde{I}$ 는 내적의 조건을 만족하지는 못하지만, 4×4 의 경우 민코프스키 거리(Minkowski metric)를 정의하며, $O(1, 3)$ 의 원소는 민코프스키 거리를 보존하는 행렬의 모임이 된다. 민코프스키 거리는 내적과는 다르게 두 벡터 사이의 거리가 0 이어도 비자명한 경우가 있으며, 음수가 될 수도 있다. 어떤 벡터를 기준으로 거리가 0인 벡터들을 모아놓으면 $n-1$ 차원의 원뿔을 이루게 되는데 이를 광추(light cone)이라 한다. 직교 행렬과의 차이를 직관적으로 이해하기 위해 가장 간단한 경우인 $O(1, 1)$ 에 대해 알아보면

$$\begin{aligned} O(1, 1) &= \left\{ \begin{pmatrix} \cosh \theta & \sinh \theta \\ \sinh \theta & \cosh \theta \end{pmatrix} : \theta \in \mathbb{R} \right\} \sqcup \left\{ \begin{pmatrix} -\cosh \theta & \sinh \theta \\ -\sinh \theta & \cosh \theta \end{pmatrix} : \theta \in \mathbb{R} \right\} \\ &\sqcup \left\{ \begin{pmatrix} \cosh \theta & -\sinh \theta \\ \sinh \theta & -\cosh \theta \end{pmatrix} : \theta \in \mathbb{R} \right\} \sqcup \left\{ \begin{pmatrix} -\cosh \theta & -\sinh \theta \\ -\sinh \theta & -\cosh \theta \end{pmatrix} : \theta \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

계산을 통해 구체적으로 위와 같이 표현된다는 것을 알 수 있다. 여기서 해당 군의 부분군으로 다음과 같은 군들이 있다:

$$\begin{aligned} SO(1, 1) &:= \left\{ \begin{pmatrix} \cosh \theta & \sinh \theta \\ \sinh \theta & \cosh \theta \end{pmatrix} : \theta \in \mathbb{R} \right\} \sqcup \left\{ \begin{pmatrix} -\cosh \theta & -\sinh \theta \\ -\sinh \theta & -\cosh \theta \end{pmatrix} : \theta \in \mathbb{R} \right\} \\ SO(1, 1)^+ &:= \left\{ \begin{pmatrix} \cosh \theta & \sinh \theta \\ \sinh \theta & \cosh \theta \end{pmatrix} : \theta \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

$SO(1, 3)$ 은 특별히 로런츠 군(Lorentz group)이라 하며, $SO(1, 3)^+$ 는 시공간에서 등속 운동하는 관찰자 간의 좌표계를 변환할 때 사용되는 군이다.

정의 28. 선형범함수 (Linear Functional) F -벡터 공간 V 에 대하여 공역이 F 인 선형 사상 $l : V \rightarrow F$ 를 선형범함수라 한다. 선형 범함수의 모임은 선형 사상의 모임이므로 벡터 공간을 이룬다. 이러한 벡터 공간을 V^* 로 표기하며, 쌍대 공간(dual space)라고 한다. 선형 범함수는 쌍대 공간의 원소로서 쌍대 벡터(dual vector) 혹은, 코벡터(covector)라 부르기도 한다.

예제 13. $\mathbb{R}^n$ 의 쌍대 공간 $\mathbb{R}^n$ 의 원소들을 열벡터로 표현하자. 그러면, 선형대수학의 기본 정리에 의해 선형범함수 $l : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 은 다음과 같이 행렬로 표현될 것이다:

$$\Phi(l) = (l^1, l^2, \dots, l^n).$$

이는 행벡터이며, 이 행벡터로 표현된 선형범함수는 $v = (v_1, \dots, v_n)^T$ 에 대해 함숫값이 다음과 같이 계산 된다:

$$l(v) = (l^1, \dots, l^n) \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = l^1 v_1 + \dots + l^n v_n = \langle (l^1, \dots, l^n)^T, (v_1, \dots, v_n)^T \rangle.$$

위 식에서 우리는 쌍대 벡터와 내적간의 모종의 관계가 있다는 것을 유추할 수 있다.

Remark 일반적으로 쌍대 벡터의 성분의 인덱스는 위첨자로 쓰고, 벡터의 성분 인덱스는 아래첨자로 쓴다.

정의 29. 쌍대 기저 (Dual Basis) 벡터 공간 V 와 기저 $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ 가 있을 때에, 쌍대 공간 V^* 에 다음과 같이 정의된 기저 $\mathcal{B}^* = \{v^1, \dots, v^n\}$ 가 있다:

$$v^i(v_j) = \delta_{ij}.$$

해당 집합이 기저가 됨을 확인해보자. 우선은,

$$\left(\sum_{i=1}^n c^i v^i \right) (e_j) = c_j = 0 \quad \text{for all } j = 1, \dots, n.$$

따라서, 해당 집합의 선형 결합이 0인 경우는 자명한 경우 밖에 없으므로 일차 독립이다. 해당 집합이 전체 쌍대 공간을 생성한다는 것을 보이기 임의의 쌍대 벡터 $u \in V^*$ 를 가져오자. 그러면 다음을 쉽게 확인할 수 있다:

$$u = \sum_{i=1}^n u(v_i) v^i.$$

따라서 $\mathcal{B}^*$ 는 V^* 의 기저가 된다.

정리 10. Riesz Representation Theorem (유한 차원 버전) 유한 차원 내적 공간 $(V, \langle, \rangle)$ 을 생각하자. 그러면 임의의 V^* 의 원소 v^* 는 어떤 벡터 $u \in U$ 가 있어서 $v^*(w) = \langle w, u \rangle$ 꼴로 유일하게 표현된다.

증명 해당 내적 공간에 정규 직교 기저 $\{e_1, \dots, e_n\}$ 를 하나 잡자. 그러면, 주어진 쌍대 벡터 v^* 는 다음과 같이 표현된다:

$$v^* = \sum_{i=1}^n v^*(e_i) e_i.$$

그러면 $u = \sum_{i=1}^n v^*(e_i) e_i$ 로 정의하면, $\langle w, u \rangle = \sum_{i=1}^n v^*(e_i) \langle w, e_i \rangle$.

$$e^i(e_j) = \langle e_i, e_j \rangle.$$

이므로, $\sum_{i=1}^n v^*(e_i) \langle w, e_i \rangle = \sum_{i=1}^n v^*(e_i) e^i(w)$ 이다. 따라서,

$$\langle w, u \rangle = v^*(u).$$

만약 u 와는 다른 u' 도 v^* 를 표현한다고 가정하자. 그러면 다음과 같은 모순을 얻는다:

$$0 \neq \langle u - u', u - u' \rangle = (v^* - v^*)(u - u') = 0.$$

따라서, v^* 의 표현은 유일하다.

Remark 해당 정리는 임의의 Hilbert 공간에 대해서 성립한다.

정리 10에 의해 우리는 쌍대성의 개념과 내적이 밀접한 관계가 있다는 것을 알 수 있다. 그런데, 내적 공간은 벡터 공간에 부가적인 구조(bilinear form에 해당하는 행렬)를 하나 부여한 것으로 볼 수 있는데 쌍대 공간은 오로지 벡터 공간과 선형 사상의 정의만으로 구성된 대상이다. 정의 26에서 수반 연산자를 정의할 때에 내적을 이용하여 했었는데 이번에는 쌍대 공간의 개념만으로 정의를 해보자.

정의 29. 수반 연산자 (Adjoint Operator) 선형 사상 $L : V \rightarrow W$ 의 수반 연산자 $L^* : W^* \rightarrow V^*$ 는 다음과 같이 정의된다:

$$L^*(w^*)(v) := w^*(Lv).$$

이를 쉽게 이해하기 위해 $V = \mathbb{R}^n, W = \mathbb{R}^m$ 으로 가정하고, 위 식을 유클리드 공간 상에서 표현해보자:

$$\Phi(L^*)((w_1, \dots, w_m)) \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} := (w_1, \dots, w_m) \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{m1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & \dots & A_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}.$$

여기서 $A_{ij} = \Phi(L)_{ij}$ 이다. 위 표현에 $w = e_i, v = e_j$ 를 넣으면 $\Phi(L^*)$ 의 i 번째 행의 j 번째 열의 원소가 나오는데, 이를 통해 $\Phi(L^*)$ 를 구하면 다음과 같다:

$$\Phi(L^*) := \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & \dots & A_{mn} \end{pmatrix}.$$

따라서, $\Phi(L^*) = \Phi(L)^T$ 이다. 또, 내적 공간 $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle_V)$, $(W, \langle \cdot, \cdot \rangle_W)$ 에 대해서는 다음과 같은 결과를 얻을 수 있다.

$$\langle L(v), \tilde{w} \rangle_W = w^*(L(v)) = L^*(w)(v) = \langle v, \widetilde{L(w)} \rangle_V.$$

여기서 $\tilde{w}$ 와 $\widetilde{L(w)}$ 는 정리 10에 의해 주어진 내적 하에서 각각 w^* 와 $L^*(w)$ 에 대응하는 벡터들이다. 표준 내적이 주어질 경우 $\widetilde{L(w)}$ 는 정의 26의 수반 연산자의 결과와 일치하는 것을 확인할 수 있다:

$$\begin{aligned} \Phi(L)_{ij} &= \langle L(e_j), e_i \rangle = \langle e_j, \widetilde{L(e_i)} \rangle \\ \Rightarrow \widetilde{L(e_i)} &= (\Phi(L)_{i1}, \dots, \Phi(L)_{in})^T = L^*(e_i). \end{aligned}$$

위 식에서 $L^* : W \rightarrow V$ 는 정의 26의 수반 연산자이다.

정의 30. 이중 쌍대 공간 (Double Dual Space) 벡터 공간 V 의 쌍대 공간의 쌍대 공간을 이중 쌍대 공간이라 하며 기호로는 V^{**} 로 쓴다.

정리 11. Naturality of Double Dual 이중 쌍대 공간 V^{**} 의 경우, 원래의 공간 V 와 자연스럽게 동형이라는 것이 알려져 있다. 구체적으로 다음과 같은 동형 사상이 존재한다:

$$\begin{aligned} m_V : V &\rightarrow V^{**} \\ m_V(v)(u^*) &:= u^*(v). \end{aligned}$$

이러한 동형 사상은 다음의 가환 그림(commutative diagram)을 가지는데,

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{L} & W \\ m_V \downarrow & & \downarrow m_W \\ V^{**} & \xrightarrow{L^{**}} & W^{**} \end{array}$$

이는 유한 차원 벡터 공간의 범주에서 항등 함자(identity functor)와 double dual 함자 사이에 자연 변환(natural transformation)이 존재하며, 각각의 m_V (V 는 임의의 유한 차원 벡터 공간)가 동형 사상이기때 두 함자가 자연 동형(naturally isomorphic)이다. 위 가환 그림을 수식으로 구체적으로 쓰면 다음과 같다:

$$m_W \circ L = L^{**} \circ m_V$$

증명

$$\left(m_W \circ L(v) \right)(w^*) = (w^*)(L(v)) = L^*(w^*)(v) = m_V(v)(L^*w^*) = \left(L^{**} \circ m_V(v) \right)(w^*).$$

이중 쌍대 공간이 원래의 공간과 본질적으로 같으므로 쌍대 개념을 생각할 때에 이중 쌍대의 경우 까지만 생각하면 된다.

예제 14. 쌍대 벡터를 이용한 선형 사상의 표현 벡터 공간 $V = \mathbb{R}^n, W = \mathbb{R}^m$ 와 표준기저 $\{e_1, \dots, e_n\}, \{e_1, \dots, e_m\}$ 를 생각하자. 선형 사상 $L : V \rightarrow W$ 이 행렬 $(a_{ij}) = A = \Phi(L)$ 로 표현될 때, 이를 다음 같이 표현할 수 있다:

$$L(v) = L\left(\sum_{i=1}^n v_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} e^j(v) e_i.$$

따라서, $L = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} e^j(\cdot) e_i$ 으로 생각할 수 있다.

예제 15. 쌍대 벡터를 이용한 쌍선형 형식의 표현 마찬가지로 쌍선형 형식도 쌍대 벡터와 벡터의 조합으로 표현할 수 있는데 구체적으로 행렬 $(b_{ij}) = B$ 로 표현되는 쌍선형 형식이 있을 때에 다음과 같은 식이 성립한다:

$$B(u, v) = B\left(\sum_{i=1}^n u_i e_i, \sum_{j=1}^n v_j e_j\right) = \sum_{i,j=1}^n u_i v_j b_{ij} = \sum_{i,j=1}^n e^i(u) e^j(v) b_{ij}.$$

따라서, $B(\cdot, \cdot) = \sum_{i,j=1}^n e^i(\cdot) e^j(\cdot) b_{ij}$ 임을 알 수 있다.

예제 14, 15를 통해 선형성을 가진 사상들은 쌍대 벡터와 벡터의 조합으로 나타낼 수 있다는걸 알 수 있다. (선형 사상의 경우 벡터 하나, 쌍대 벡터 하나의 조합 (1,1), 쌍선형 형식의 경우 쌍대 벡터 두개의 조합 (0,2) 이다.) 더 일반적으로 다중 선형 사상(multi-linear map or tensor)도 벡터와 쌍대 벡터의 조합으로 표현이 되는

정의 31. 범주 (Category) 범주 $\mathcal{C}$ 는 대상(object)들의 모임 $\text{ob}(\mathcal{C})$ 과 사상(morphism)들의 모임 $\text{hom}(\mathcal{C})$ 로 구성 돼있는데, 사상들의 모임은 임의의 $A, B \in \text{ob}(\mathcal{C})$ 에 대해 다음 조건들을 만족하는 $f \in \text{hom}(A, B)$ 들로 구성 돼있다:

- 임의의 $A, B, C \in \text{ob}(\mathcal{C})$ 에 대해 합성 $\circ : \text{hom}(A, B) \times \text{hom}(B, C) \rightarrow \text{hom}(A, C)$ 이 정의 된다. ($f \circ g$ 혹은 fg 로 표기한다.)
- 합성은 결합법칙을 만족한다. 즉, $f \in \text{hom}(A, B), g \in \text{hom}(B, C), h \in \text{hom}(C, D)$ 에 대해 $h(gf) = (hg)f$.
- 임의의 대상 $A \in \text{ob}(\mathcal{C})$ 에 대해 $\text{id}_A \in \text{hom}(A, A)$ 가 있어서 $f \in \text{hom}(B, C)$ 에 대해 $f \circ \text{id}_B = \text{id}_C \circ f = f$ 를 만족한다.

예제 16. 범주의 예시들 범주의 예시로는 다음이 있다. (대상들의 모임, 사상들의 모임)으로 표기하겠다:

- (집합의 모임, 관계의 모임)
- (집합의 모임, 함수들의 모임)
- (위상 공간의 모임, 연속함수들의 모임)
- (다양체의 모임, 연속함수들의 모임)

- (매끄러운 다양체의 모임, 매끄러운 함수들의 모임)
- (군의 모임, 군 준동형 사상의 모임)
- (벡터 공간의 모임, 선형 사상의 모임)
- (유한 차원 벡터 공간의 모임, 선형 사상의 모임)

이외에도 수학의 많은 것들이 범주를 이룬다.

정의 32. 함자 (Functor) 함자란 두 범주 사이의 구조를 대응시키는 개념이다. 범주 $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ 가 주어졌을 때 함자 $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ 는 $X \in \text{ob}(\mathcal{C})$ 를 $F(X) \in \text{ob}(\mathcal{D})$ 로 대응시키며, $f \in \text{hom}(X, Y)$ 는 $F(f) \in \text{hom}(F(X), F(Y))$ 로 대응시킨다. 그리고 다음 조건들을 만족하여야 한다:

- $F(\text{id}_X) = \text{id}_{F(X)}$.
- $f \in \text{hom}(X, Y), g \in \text{hom}(Z, Y)$ 에 대해 $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$.

정의 33. 자연 변환 (Natural Transformation) 함자를 통해 두 범주 사이의 사상을 정의했듯, 두 함자 사이의 변환을 정의할 수 있다. 이를 자연 변환이라 하며, 구체적으로 함자 $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ 가 있을 때에 자연 변환 $\eta : F \Rightarrow G$ 는 다음과 같이 구성된다:

- $X \in \text{ob}(\mathcal{C})$ 에 대해 사상 $\eta_X : F(X) \rightarrow G(X)$ 가 존재한다.
- 임의의 $f \in \text{hom}(X, Y)$ 에 대해 $\eta_Y \circ F(f) = G(f) \circ \eta_X$ 를 만족 해야 한다.

여기서 두 번째 조건을 그림으로 표현하면 다음과 같다:

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{F(f)} & F(Y) \\ \eta_X \downarrow & & \downarrow \eta_Y \\ G(X) & \xrightarrow{G(f)} & G(Y) \end{array}$$

각각의 η_X 가 동형 사상일 경우 두 함자가 자연 동형(naturally isomorphic)이라고 한다.

예제 17. 항등 함자와 이중 쌍대 함자 유한 차원 벡터 공간의 범주에서 F 를 항등 함자, G 를 이중 쌍대 함자($G(V) = V^{**}, G(L) = L^{**}$)으로 둘 경우 F, G 는 정리 11의 m_V 에 의해 자연 동형이다.

예제 18. 기타 함자들과 자연 변환의 예시 호몰로지 군은 위상 공간과 군 사이의 함자가 되며, 호모토피 군도 위상 공간과 군 사이의 함자가 된다. 호몰로지 군과 호모토피 군 사이에는 자연 변환(Hurewicz homomorphism)이 존재한다.

정의 34. 다중선형사상 (Multi-linear Map) F -벡터 공간 V 에 대해 함수 $F : V \times \cdots \times V \times V^* \times \cdots \times V^* \rightarrow F$ 가 각각의 성분에 대해 선형성을 만족하면 이를

다중선형사상이라고 한다. 정의역의 곱공간의 V 의 개수가 p , V^* 의 개수가 q 일 때 F 를 (p, q) -다중선형사상이라 하겠다.

정리 12. 다중선형사상의 선형 확장 정리 V 의 기저를 $\{e_1, \dots, e_n\}$, 쌍대 기저를 $\{e^1, \dots, e^n\}$ 라 하자. 그러면, 다중선형사상의 각 성분의 선형성에 의해 다음이 성립한다:

$$F(v_1, \dots, v_p, w^1, \dots, w^q) = \sum_{i_1, \dots, i_p, j^1, \dots, j^q} v_{i_1} \dots v_{i_p} w^{j^1} \dots w^{j^q} F(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}, e^{j^1}, \dots, e^{j^q})$$

위 정리에 의해 다중선형사상은 기저와 쌍대 기저의 순서쌍들의 조합 $(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}, e^{j^1}, \dots, e^{j^q})$ 에서의 값만 결정되면 정해진다는 것을 알 수 있다.

정의 35. 자유 벡터 공간 집합 $S = \{s_1, \dots, s_n\}$ 가 있을 때에 다음과 같은 F -벡터 공간을 형식적으로 정의할 수 있다:

$$\{r_1 s_1 + \dots + r_n s_n : r_i \in F\}.$$

여기서 상수배와 벡터의 덧셈은 다음 동형 사상을 이용하여 벡터 공간 F^n 에서 유도된다:

$$r_1 s_1 + \dots + r_n s_n \leftrightarrow (r_1, \dots, r_n) \in F^n.$$

정의 36. 텐서 (Tensor) 벡터 공간 V 의 기저가 $\{e_1, \dots, e_n\}$, 쌍대 기저가 $\{e^1, \dots, e^n\}$ 일 때에 순서쌍 $(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}, e^{j^1}, \dots, e^{j^q})$ 을 다음과 같이 표기하자:

$$e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j^1} \otimes \dots \otimes e^{j^q}.$$

그러면 이 기저들에 의해 생성되는 자유 벡터 공간 $\overbrace{V \otimes \dots \otimes V}^{p\text{-times}} \otimes \overbrace{V^* \otimes \dots \otimes V^*}^{q\text{-times}}$ 은 n^{p+q} 차원 공간이 되며 이 공간에 순서쌍의 각각의 성분들에 대해 다음과 같은 연산을 정의하도록 하자:

$$(u + v) \otimes w = u \otimes w + v \otimes w,$$

$$(rv) \otimes w = r(v \otimes w) = v \otimes (rw).$$

이렇게 구성된 구조를 텐서곱이라고 하며 위와 같은 경우 (p, q) -텐서에 해당한다.

예제 19. $\mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3$ 의 기저는 다음과 같다:

$$\begin{aligned} &\{e_1 \otimes e_1, e_1 \otimes e_2, e_1 \otimes e_3, \\ &\quad e_2 \otimes e_1, e_2 \otimes e_2, e_2 \otimes e_3, \\ &\quad e_3 \otimes e_1, e_3 \otimes e_2, e_3 \otimes e_3\}. \end{aligned}$$

해당 공간이 $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ 과 다르다는 것을 보이기 위해 $u = (1, 1, 1)^T, v = (1, 1, 1)^T$ 에 대해 (u, v) 와 $u \otimes v$ 를 계산해보자:

$$(u, v) = (1, 1, 1, 1, 1, 1)^T = (1, 1, 1, 0, 0, 0)^T + (0, 0, 0, 1, 1, 1)^T = u \times 0 + 0 \times v,$$

$$\begin{aligned}
u \otimes v &= (e_1 + e_2 + e_3) \otimes (e_1 + e_2 + e_3) \\
&= e_1 \otimes (e_1 + e_2 + e_3) + e_2 \otimes (e_1 + e_2 + e_3) + e_3 \otimes (e_1 + e_2 + e_3) \\
&= e_1 \otimes e_1 + e_1 \otimes e_2 + e_1 \otimes e_3 + e_2 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_3 + e_3 \otimes e_1 + e_3 \otimes e_2 + e_3 \otimes e_3.
\end{aligned}$$

또, $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ 에는 단일하게 직접곱과는 다르게 두 벡터의 텐서곱으로 표현되지 않는 원소 또한 존재한다:

$$e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1$$

$\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ 는 $\mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ 와 다음과 같은 동형 사상에 의해 벡터 공간으로서 동형이다:

$$\sum_{i,j} a_{ij} e_i \otimes e_j \leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

이때 두 벡터 $u, v \in \mathbb{R}^3$ 의 텐서곱은 동형 사상에 의해 다음 행렬에 대응한다는 것을 알 수 있다:

$$(u_1, u_2, u_3)^T \otimes (v_1, v_2, v_3)^T \leftrightarrow \begin{pmatrix} u_1 v_1 & u_1 v_2 & u_1 v_3 \\ u_2 v_1 & u_2 v_2 & u_2 v_3 \\ u_3 v_1 & u_3 v_2 & u_3 v_3 \end{pmatrix}.$$

정리 13. 다중선형사상과 텐서의 관계 다중선형사상 $F : \overbrace{V \times \cdots \times V}^{p\text{-times}} \times \overbrace{V^* \times \cdots \times V^*}^{q\text{-times}} \rightarrow F$ 과 선형 사상 $\tilde{F} : \overbrace{V \otimes \cdots \otimes V}^{p\text{-times}} \otimes \overbrace{V^* \otimes \cdots \otimes V^*}^{q\text{-times}} \rightarrow F$ 는 일대일 대응된다. 그리고, 두 사상은 다음과 같은 관계식을 만족한다:

$$\tilde{F}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_p \otimes v^1 \otimes \cdots \otimes v^q) = F(v_1, \dots, v_p, v^1, \dots, v^q).$$

정리 14. 다중선형사상 텐서의 관계 2 스칼라를 함숫값으로 가지는 다중선형사상은 정리 13에 의해 텐서곱 벡터 공간의 선형범함수와 일대일 되므로, 텐서의 쌍대 벡터로서 다중선형사상 또한 텐서로 볼 수 있다. 구체적으로, 텐서의 쌍대성은 다음과 같이 표현이 된다:

$$e^{i'_1} \otimes \cdots \otimes e^{i'_p} \otimes e_{j'_1} \otimes \cdots \otimes e_{j'_q} (e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \cdots \otimes e^{j_q}) = \delta_{i_1 i'_1} \cdots \delta_{i_p i'_p} \delta_{j_1 i'_1} \cdots \delta_{j_q i'_q}.$$

따라서 (p, q) -텐서의 쌍대 텐서는 (q, p) -텐서이다. 임의의 다중선형사상은 쌍대 텐서의 조합으로 표현될 수 있다.

정의 37. 교대 다중선형사상 (Alternating Multi-linear Map) 다중선형사상 $F : V \times \cdots \times V \times V^* \times \cdots \times V^* \rightarrow F$ 이 임의의 성분에 대해 다음을 만족하면 교대 다중선형사상이라 한다:

$$F(\dots, u, \dots, v, \dots) = -F(\dots, v, \dots, u, \dots).$$

명제 6. 교대 다중선형사상의 성질

1. 교대 다중선형사상의 변수에 동일한 벡터가 있을 경우 함숫값이 0이 된다.
2. 변수 벡터들의 집합이 종속일 경우 함숫값이 0이 된다.
3. $\dim(V) = n$ 일 때 교대 다중선형사상 $F : \overbrace{V \times \cdots \times V}^{n\text{-times}}$ 은 $I = (e_1, \dots, e_n)$ 에서의 값으로 완전히 결정된다.

증명 1.

$$F(\dots, v, \dots, v, \dots) = -F(\dots, v, \dots, v, \dots) \\ \Rightarrow 2F(\dots, v, \dots, v, \dots) = 0.$$

2. 1에 의해 변수의 한 벡터를 다른 성분에 상수배하여 더하는 것은 함숫값에 영향을 미치지 않는다:

$$F(\dots, u, \dots, cu + v, \dots) = cF(\dots, u, \dots, u, \dots) + F(\dots, u, \dots, v, \dots) \\ = F(\dots, u, \dots, v, \dots).$$

따라서, 변수의 벡터들이 일차 종속일 경우 위와 같은 연산을 통해 변수의 한 성분을 0으로 만들 수 있으므로 함숫값이 0이 된다. 3. 다중선형사상의 성질에 의해 임의의 변수에 대해 다음과 같은 식이 성립한다:

$$F(v_1, \dots, v_n) = \sum_{i_1, \dots, i_n} v_{i_1} \dots v_{i_n} F(e_{i_1}, \dots, e_{i_n}).$$

이때, 2에 의해 $\{e_{i_1}, \dots, e_{i_n}\}$ 에 중복되는 경우가 있는 경우는 0이 된다. 따라서, 다음 식을 얻고:

$$F(v_1, \dots, v_n) = \sum_{\sigma \in \mathcal{P}} v_{\sigma(1)} \dots v_{\sigma(n)} F(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)}).$$

여기서 $\mathcal{P}$ 은 모든 순열(permutation)의 집합이다. (순열은 $\{1, \dots, n\}$ 위의 전단사 함수를 뜻한다.) 이제 변수의 단위 벡터들의 순서를 정렬하면 1에 의해 다음 식을 얻는다:

$$F(v_1, \dots, v_n) = \sum_{\sigma \in \mathcal{P}} \text{sgn}(\sigma) v_{\sigma(1)} \dots v_{\sigma(n)} F(e_1, \dots, e_n).$$

여기서 $\text{sgn}(\sigma)$ 는 변수 벡터들의 순서를 바꾸는 과정에서 나오는 부호이다.

정의 38. 행렬식 Revisit Lecture 2의 정의 16에서 행렬식을 다음과 같이 정의했었다:

$$\det A := \sum_{L \in \mathcal{L}} \text{sgn}(L) \prod_{i=1}^n (L(e_i) \cdot \Psi(A)(e_i)).$$

$A = (a_{ij})$ 로 표기하고 L 을 순열과 대응 시키면 위 식은 다음과 같이 쓰인다:

$$\det A := \sum_{L \in \mathcal{L}} \text{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i\sigma(i)}$$

$$= \sum_{L \in \mathcal{L}} \text{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots a_{n\sigma(n)}.$$

따라서, 행렬식은 항등 행렬에서의 값이 1인 행렬의 열벡터들에 대한 교대 다중선형 사상이다.

명제 7. 행렬식의 성질 Revisit 행렬식은 다음과 같은 성질을 만족한다:

1. $\det I = 1$.
2. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.
3. A 가 가역행렬이 아니면 $\det A = 0$.
4. $A \sim B$ 이면 $\det A = \det B$

증명 1. 정의 38에 의해 자명.

2.

$$\begin{aligned} \det(AB) &= \det(A[B]^1, \dots, A[B]^n) \\ &= \det\left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} b_{j1} e_i, \dots, \sum_{i,j=1}^n a_{ij} b_{jn} e_i\right) \\ &= \sum_{\sigma \in \mathcal{P}} \text{sgn}(\sigma) b_{\sigma(1)1} \dots b_{\sigma(n)n} \det\left(\sum_{i=1}^n a_{i1} e_i, \dots, \sum_{i=1}^n a_{in} e_i\right) \\ &= \det(B) \det(A). \end{aligned}$$

여기서 $[B]^i$ 는 행렬 B 의 i -번째 열벡터를 의미한다.

3. $n \times n$ 행렬 A 가 가역행렬이 아니라는 것은 $\Psi(A)$ 가 동형 사상이 아니며 따라서, 정리 5에 의해 $\dim(\text{Im})(\Psi(A)) < n$ 이 된다. 따라서, 열벡터들의 집합 $\{[A]^1, \dots, [A]^n\}$ 는 일차 종속 집합이 되며 명제 6에 의해 행렬식의 값은 0이 된다.

4. $A \sim B$ 라는 것은 어떤 가역행렬 P 가 있어서 $PAP^{-1} = B$ 를 의미한다. 따라서, 2에 의해:

$$\det(B) = \det(PAP^{-1}) = \det(P) \det(A) \det(P^{-1}) = \det(A) \det(P) \det(P^{-1})$$

$$\det(A) \det(P P^{-1}) = \det(A) \det(I) = \det(A).$$

정의 39. 선형 사상, 쌍선형 형식 Revisit 벡터 공간 V, W 의 기저가 각각 $\{v_1, \dots, v_n\}$, $\{w_1, \dots, w_m\}$ 이고, 쌍대 기저가 $\{v^1, \dots, v^n\}$, $\{w^1, \dots, w^m\}$ 일 때에 임의의 선형 사상 $L: V \rightarrow W$ 와 쌍선형 형식 $B: V \times V \rightarrow F$ 는 각각 $(1, 1)$ -텐서, $(0, 2)$ -텐서로 볼 수 있다:

$$L = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i^j w_j \otimes v^i,$$

$$B = \sum_{i,j=1}^n B^{ij} v^i \otimes v^j.$$

정의 40. 텐서 대수 (Tensor Algebra) F -벡터 공간 V 의 텐서 대수 $T(V)$ 는 다음과 같이 정의된다:

$$T(V) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} T^n V = F \oplus (V) \oplus (V \otimes V) \oplus \cdots$$

여기서 $T^0 V = F, T^k = \bigotimes_{i=1}^k V$ 이다. 해당 대수에서 텐서곱 연산은 다음과 같이 정의된다:

$$\cdot \otimes \cdot : T^i V \times T^j V \rightarrow T^{i+j} V$$

$$(v, w) \rightarrow v \otimes w,$$

$$1_F \otimes v = v \otimes 1_F = v.$$

해당 연산은 정의 36에서 정의된 연산에 의해 잘 정의된다.

정의 41. 외대수 (Exterior Algebra) 텐서 대수 $T(V)$ 에서 $I = \langle \{v \otimes v : v \in T(V)\} \rangle$ 로 자른 대수 $\bigwedge(V) := T(V)/I$ 를 외대수라 한다. 외대수에서의 켤레곱(wedge product)은 다음과 같이 정의된다:

$$u \wedge v := u \otimes v \pmod{I}.$$

텐서를 다중선형사상으로 이해한다면 외대수는 교대 다중선형사상들의 모임으로 이해할 수 있다.

예제 20. 켤레곱의 구체적인 계산 켤레곱의 구체적인 계산은 다음과 같다:

$$u_1 \wedge \cdots \wedge u_n = \frac{1}{n!} \sum_{i=1}^n \text{sgn}(\sigma) u_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes u_{\sigma(n)}$$

행렬식을 단위 벡터들의 켤레곱으로 표현하면 다음과 같이 된다:

$$\det = e^1 \wedge \cdots \wedge e^n.$$

$\bigwedge(\mathbb{R}^3)$ 의 두 벡터 $u = (u_1, u_2, u_3)^T, v = (v_1, v_2, v_3)^T$ 켤레곱을 계산해보자:

$$\begin{aligned} u \wedge v &= \frac{1}{2} \left(\sum_{i,j=1}^3 u_i v_j e_i \otimes e_j - \sum_{i,j=1}^3 u_i v_j e_j \otimes e_i \right) \pmod{I} \\ &\simeq \begin{pmatrix} 0 & u_1 v_2 - u_2 v_1 & u_1 v_3 - u_3 v_1 \\ u_2 v_1 - u_1 v_2 & 0 & u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 & u_3 v_2 - u_2 v_3 & 0 \end{pmatrix} \pmod{I}. \end{aligned}$$

$A^T = -A$ 를 만족하는 행렬 3×3 행렬들의 모임은 차원이 3이다. 이를 $\mathbb{R}^3$ 의 원소로 보면 우리는 다음과 같은 결과를 얻는다:

$$u \wedge v \simeq \begin{pmatrix} 0 & u_1 v_2 - u_2 v_1 & u_1 v_3 - u_3 v_1 \\ u_2 v_1 - u_1 v_2 & 0 & u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 & u_3 v_2 - u_2 v_3 & 0 \end{pmatrix} \pmod{I}$$

$$\simeq (u_1v_2 - u_2v_1, u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3)^T = u \times v.$$

따라서, 외적은 켤레곱의 한 형태임을 알 수 있다.

예제 21. 벡터로서의 미분과 미분 형식 (Derivative and Differential Form)
 $\mathbb{R}^n$ 의 미분가능한 함수들의 모임 $C^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ 에서 라이프니츠 규칙을 만족하는 선형 사상들의 모임(즉, 미분) $T(\mathbb{R}^n)$ 은 $\mathbb{R}^n$ 와 동형이다. 이때 각 단위 벡터로의 편미분이 기저를 이룬다:

$$\langle \mathcal{E} \rangle = \langle \{\partial_1, \dots, \partial_n\} \rangle = T(\mathbb{R}^n).$$

$T(\mathbb{R}^n)$ 의 쌍대 공간을 $T^*(\mathbb{R}^n)$ 이라 할 때에 $\mathcal{E}$ 의 쌍대 기저를 다음과 같이 쓴다:

$$\{dx_1, \dots, dx_n\}.$$

해당 쌍대 공간의 외대수 $\bigwedge(T^*(\mathbb{R}^n))$ 를 미분 형식이라고 하며, 이 외대수에는 다음과 같은 외미분(exterior derivative)이 정의된다:

$$\begin{aligned} d(w) &= d\left(\sum w^{i_1 \dots i_n} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_n}\right) \\ &:= \sum (\partial_j w) dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_n}. \end{aligned}$$

외미분의 개념을 이용하면 $\mathbb{R}^3$ 상의 기울기(gradient), 회전(curl), 발산(divergence)을 하나의 개념으로 이해할 수 있다:

$$\nabla f \leftrightarrow df,$$

$$\nabla \times F \leftrightarrow dw,$$

$$\nabla \cdot G \leftrightarrow d\tau.$$

여기서 첫 번째 식의 결과는 자명한 동형이 있고, 두 번째 식의 결과는 예제 20에서의 $\bigwedge(\mathbb{R}^3)$ 의 켤레곱과 외적의 대응 관계를 이용하여 대응이 되고, 세 번째 식 또한 결과가 스칼라 함수이므로 자명한 동형 관계가 있다.