

수학 문제 연구회

코호몰로지와 스펙트럼 열

Taeyoung Kim

본 자료는 강의 노트이므로 상세한 부분은 본문에서 생략 되어 있으며 강연에서 다룬다.

정의 1. 가군 (Module) 덧셈과 곱셈이 정의된 집합 R 와 집합 M 위에 연산 $+$: $M \times M \rightarrow M$ 와 $\cdot$: $R \times M \rightarrow M$ 가 있어서 조건 (M.1) ~ (M.7)을 만족하면, $(M, +, \cdot)$ 을 R -module 이라고 한다. 이때, $+$ 를 가군의 덧셈, $\cdot$ 를 상수배 (scalar multiplication) 라고 칭하는데, $\cdot$ 의 경우 생략하여 표시하는 경우가 많다. 간단하게 $(M, +, \cdot)$ 를 M 로 표기하기도 한다.

- (M.1) - 임의의 $u, v, w \in M$ 에 대하여 $(u + v) + w = u + (v + w)$ 가 성립한다. (결합법칙)
- (M.2) - 모든 원소 $v \in M$ 에 대하여 $v + 0 = 0 + v = v$ 를 만족하는 원소 $0 \in M$ 가 존재한다. (항등원)
- (M.3) - 각각의 $v \in M$ 에 대해 $v + w = 0$ 을 만족하는 $w \in M$ 가 존재한다. 이때 w 를 $-v$ 로 표기한다. (역원)
- (M.4) - 임의의 $u, v \in M$ 에 대해 $u + v = v + u$ 가 성립한다. (가환성)
- (M.5) - 임의의 $a, b \in R, v \in M$ 에 대하여 $(ab) \cdot v = a \cdot (b \cdot v)$ 가 성립한다.
- (M.6) - $1_R \in R$ (R 의 항등원)와 모든 원소 $v \in M$ 에 대하여 $1_R \cdot v = v$ 가 성립한다.
- (M.7) - 임의의 $a, b \in R, u, v \in M$ 에 대하여 $(a+b) \cdot (u+v) = a \cdot u + a \cdot v + b \cdot u + b \cdot v$ 가 성립한다.

여기서 조건 (M.1) ~ (M.4)은 $(M, +)$ 가 가환군 (Abelian Group)일 조건이다. 두 연산이 정의된 군(즉, 환 (Ring)) R 는 앞으로의 논의에서 주로 $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_p$, (p is prime)로 등장할 것이다. 가군에서 역원과의 덧셈을 다음과 같이 표기한다: $u + (-v) = u - v$. 벡터 공간은 가군에서 상수배가 체에 대해 정의된 특별한 경우로 생각할 수 있다. 일반적으로 환의 곱셈은 가환일 필요가 없지만 우리의 논의에서는 주로 가환인 경우를 다룰 것이다.

예제 1. 환의 예시들 (Examples of Rings)

- 체는 환의 특별한 경우이다 : $\mathbb{Z}_p$ (p is prime), $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ (사원수는 비가환체의 예시이다.).

- 정수 환 $\mathbb{Z}$.
- 다항식 환 (polynomial ring) : $R[x], R[x_1, \dots, x_n]$
- 부분환 및 아이디얼 (subring and ideal) : $\mathbb{Z}$ 의 부분환은 $n\mathbb{Z}$ 이며 이는 또한 아이디얼도 된다. $S \subset R$ 일 때에 $\langle S \rangle := \{\sum_{\text{finite sum}} r_i s_i : r_i \in R, s_i \in S\}$ 는 아이디얼이 된다.
- 몫환 (quotient ring) : $I \subset R$ 가 아이디얼일 때에 몫환 R/I 를 정의할 수 있다.

Remark

- 몫환을 구성할 때에 아이디얼이 소 아이디얼 (prime ideal), 극대 아이디얼 (maximal ideal)일 경우에 각각 몫환은 정역 (integral domain), 체 (field)가 된다.
- 모든 아이디얼이 한 원소로 생성될 수 있는 환을 주 아이디얼 정역 (principal ideal domain)이라 한다.
- 체 $\subset$ 유클리드 정역 $\subset$ PID $\subset$ UFD $\subset$ 정역 $\subset$ 가환환 정도의 포함 관계는 숙지해두는 것이 좋다.
- 모든 수학적 개념들이 그러하듯이 환도 다양한 성질의 예시들이 있다. 모든 환의 성질을 한꺼번에 이해하는 것은 어려운 일이고, 각 주제의 맥락에 따라 여러 환들의 정의와 성질들을 익히는 것을 추천한다.

예제 2. 가군의 예시들 (Examples of Modules)

- 벡터 공간은 가군의 특별한 경우이다.
- 모든 가환군은 $\mathbb{Z}$ -가군이다.
- 가군의 부분군은 부분가군을 이룬다.
- R -가군의 부분 집합 $S \subset M$ 가 있을 때에 S 로 생성되는 가군은 다음과 같다 : $\langle S \rangle := \{\sum_{\text{finite sum}} r_i x_i : r_i \in R, x_i \in S\}$.
- 가군을 부분가군으로 몫을 취하여 몫가군을 구성할 수 있다:

$$M/N := \{\bar{a} : \bar{a} \equiv \bar{b} \leftrightarrow a - b \in N\}.$$

- 일단 R 위의 (유한 생성) 자유 가군은 R^k , (k 는 어떤 자연수)와 동형인 가군으로 이해하자.

증명 없이 다음 정리를 소개하도록 하겠다.

정리 1. PID 위의 유한생성 가군의 기본정리 (Structure Theorem for Finitely Generated Modules over PID) PID R -가군 M 이 유한 생성될 때 M 은 자유가군 (free module)과 cyclic module의 직합으로 나타낼 수 있다.

1. $M \simeq R^r \times (R/a_1) \times \cdots \times (R/a_k),$
2. $M \simeq R^r \times (R/p_1^{e_1}) \times \cdots \times (R/p_k^{e_k})$

여기서 r 는 베티 수라 불리는 자연수 값이며, 1의 invariant factor라 불리는 $a_i \in R$ 들은 $a_1|a_2|\dots|a_k$ 를 만족한다. 2의 $p_i \in R$ 들은 기약원 (prime element)이며, $p_i^{e_i}$ 는 elementary divisor라 불린다. 1과 2의 표현은 유일하게 결정이 된다.

Remark

- 해당 정리에서 $R = \mathbb{Z}$ 인 경우 유한 생성 가환군의 구조 정리가 도출이 된다. 정수 계수를 가지는 호몰로지 이론을 전개할 때에 해당 따름정리를 전제로 하고 진행한다.
- 선형 연산자의 다양한 분해 정리들이 정리 1에서 $R = K[T]$ (T 는 K -벡터 공간에 작용하는 선형 연산자)로 뚫으로써 따름정리로 도출된다.

정의 2. 준동형사상 R -가군 M, N 사이의 사상 $\phi : M \rightarrow N$ 는 다음을 만족하면 준동형사상 (homomorphism)이라 한다.

$$\text{for all } a, b \in M \text{ and } r \in R, \\ \phi(ra + b) = r\phi(a) + \phi(b).$$

정의 3. 준동형사상의 표기와 가환 그림 (Commutative Diagram) 준동형사상, 더 일반적으로 사상 (morphism)은 arrow 라고도 하는데, 다음과 같은 표기를 사용하기 때문이다.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\varphi} & B \\ \varrho_A \downarrow & & \downarrow \varrho_B \\ \tilde{A} & \xrightarrow{\phi} & \tilde{B} \end{array} \quad (1)$$

가환 그림 (1)은 다음 식을 의미한다.

$$\varrho_B \circ \varphi = \phi \circ \varrho_A.$$

정의 4. Hom 함자 (Hom Functor) R -가군 M, N 이 있을 때에 모든 사상 $M \rightarrow N$ 을 모아놓은 집합을 $\text{Hom}_R(M, N)$ 로 표기한다. R 이 가환일 경우 해당 집합이 다시 R -가군이 되는 것을 알 수 있다. ($r \cdot f(kx) = rkf(x) = krf(x) = (rf)(kx)$) R -가군 M 이 있을 때에 다음과 같은 함자를 정의할 수 있다.

$$\text{Hom}_R(-, M) \text{ sends object } N \text{ into } \text{Hom}_R(N, M), \\ \text{and } f : N \rightarrow N' \text{ into } \text{Hom}_R(f, M) : \text{Hom}_R(N', M) \rightarrow \text{Hom}_R(N, M).$$

구체적으로 $\text{Hom}_R(N', M)$ 의 원소 g 에 대해 $\text{Hom}_R(f, M)(g) := g \circ f \in \text{Hom}_R(N, M)$ 이다. 다음 사상의 열에 대해 Hom 함자를 취하면,

$$N \xrightarrow{g} N' \xrightarrow{h} N''$$

다음과 같은 화살표가 뒤집힌 사상의 열을 얻게 된다.

$$\text{Hom}_R(N'', M) \xrightarrow{- \circ h} \text{Hom}_R(N', M) \xrightarrow{- \circ g} \text{Hom}_R(N, M).$$

이를 식으로 쓰면 다음과 같다.

$$\text{Hom}_R(h \circ g) = \text{Hom}_R(g) \circ \text{Hom}_R(h).$$

이렇게 사상의 순서를 뒤바꾼 채로 변환하는 함수들을 반변함자 (contravariant functor)라 한다.

Remark

- 모듈을 K -벡터 공간으로 가정하고 Hom 함수의 우항에 체 K 를 대입하면 이는 정확히 쌍대 공간에 해당한다.
- 사상의 순서를 보존한 채로 변환하는 함수는 공변함자 (covariant functor)라 한다. 정의 4의 Hom 함수와 유사하게 이번에는 좌항을 고정하고 우항을 변수로 받으면 공변 함수가 됨을 확인할 수 있다.

정의 5. 완전열 (Exact Sequence) 다음과 같은 사상의 열이 있을 때에 전 사상의 상과 다음 사상의 핵이 일치하는 경우 이를 완전열이라 한다:

$$\cdots \xrightarrow{\phi_{i-2}} A_{i-1} \xrightarrow{\phi_{i-1}} A_i \xrightarrow{\phi_i} A_{i+1} \xrightarrow{\phi_{i+1}} \cdots$$

$$\ker \phi_i = \text{im}(\phi_{i-1}) \quad \text{for all } i \in \mathbb{Z}.$$

예제 3. 완전열 예시들

- 완전열

$$0 \xrightarrow{0} M \xrightarrow{\phi} N$$

과 ϕ 가 단사라는 것은 동치이다.

- 완전열

$$M \xrightarrow{\psi} N \xrightarrow{0} 0$$

과 ψ 가 전사라는 것은 동치이다.

- 완전열

$$0 \xrightarrow{0} M \xrightarrow{\phi} N \xrightarrow{\psi} L \xrightarrow{0} 0$$

을 짧은 완전열 (short exact sequence)라 한다. 짧은 완전열의 모임은 뱀 보조정리를 통해 긴 완전열로 엮을 수 있는데 이는 호몰로지 이론에서 주요하게 쓰이는 기술이다.

정리 2. 분할 보조정리 (Splitting Lemma) 다음 짧은 완전열이

$$0 \xrightarrow{0} M \xrightarrow{\phi} N \xrightarrow{\psi} L \xrightarrow{0} 0$$

$N \simeq M \oplus L$ 을 만족할 경우, 이를 분할 완전열 (split exact sequence)라 한다. 다음은 분할 완전열의 동치인 정의들이다.

- $\tilde{\phi} \circ \phi = \text{id}_M$ 를 만족하는 $\tilde{\phi} : N \rightarrow M$ 가 있다.
- $\psi \circ \tilde{\psi} = \text{id}_L$ 를 만족하는 $\tilde{\psi} : L \rightarrow N$ 가 있다.

증명 $\Psi : M \oplus L \rightarrow N$ 가 동형 사상일 때에 $\Psi \circ \iota_L : L \rightarrow N$ 이 $\tilde{\psi}$ 의 역할을 하고, $\pi_M \circ \Psi^{-1}$ 이 $\tilde{\phi}$ 역할을 하는 것을 알 수 있다. 여기서 ι_L 과 π_M 은 각각 표준적인 포함 함수, 사영 함수이다. 반대로 $\tilde{\phi}$ 가 주어졌을 때에 $N = \text{im}(\phi) \oplus \ker \tilde{\phi}$ 를 확인할 수 있다. $\tilde{\phi}$ 가 전사이므로 $N = \text{im}(\phi) + \ker \tilde{\phi}$ 는 자명하고, $b = \phi(a) \in \text{im}(\phi) \cap \ker \tilde{\phi}$ 일 때에 $\tilde{\phi}(b) = 0 = \tilde{\phi} \circ \phi(a) = a$ 이므로, 유일성도 쉽게 알 수 있다. ψ 의 경우도 비슷한 방식으로 증명하면 된다.

예제 4. 분할 완전열이 아닌 경우들

- 짧은 완전열

$$0 \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{2n} \mathbb{Z} \xrightarrow{n \bmod 2} \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{0} 0$$

은 분할 완전열이 되지 않는다.

- 짧은 완전열

$$0 \xrightarrow{0} \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{2n} \mathbb{Z}_4 \xrightarrow{n \bmod 2} \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{0} 0$$

도 마찬가지로 분할 완전열이 되지 않는다.

정의 6. 사영 가군 (Projective Module) 임의의 가군 사상 $P \rightarrow M, N \rightarrow M \rightarrow 0$ 에 대해 다음 다이어그램을 만족시키는 $P \rightarrow N$ 이 존재하면 P 를 사영 가군이라 한다.

$$\begin{array}{ccccc} & & P & & \\ & \swarrow & \downarrow & & \\ N & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

명제 1. 사영 가군에 대해서는 다음의 사실들이 성립한다:

1. 모든 짧은 완전열

$$0 \xrightarrow{0} N \longrightarrow M \longrightarrow P \xrightarrow{0} 0$$

이 분할 완전열이다.

2. 완전열

$$0 \xrightarrow{0} M \xrightarrow{\phi} N \xrightarrow{\psi} L \xrightarrow{0} 0$$

이 있을 때에 다음도 완전열이 된다.

$$0 \xrightarrow{0} \text{Hom}_R(P, M) \xrightarrow{\phi \circ -} \text{Hom}_R(P, N) \xrightarrow{\psi \circ -} \text{Hom}_R(P, L) \xrightarrow{0} 0$$

(일반적으로는 $\text{Hom}_R(P, \psi)$ 가 전사가 아니다.)

3. 어떤 가군 Q 가 있어서 $Q \oplus P$ 가 자유 가군이 된다.

위 사실들은 정의 6과 동치이다.

증명

정의 6 $\rightarrow$ 1) 다음 가환 그림을 생각하면 정의로 부터 성질 1을 쉽게 도출할 수 있다.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & P & & \\ & & & \swarrow & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & M & \longrightarrow & P \longrightarrow 0 \end{array}$$

1 $\rightarrow$ 3) P 의 생성원들로 구성된 자유 가군 M 을 생각하자. 그러면 1에 의해 다음 분할 완전열이 성립한다:

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow P \longrightarrow 0$$

따라서, $M \simeq N \oplus P$.

3 $\rightarrow$ 2) 사상 $\varphi : P \rightarrow L$ 이 있을 때에 이를 $\tilde{\varphi} : Q \oplus P \rightarrow L$ 로 확장할 수 있고, 사상 $\tilde{\varphi} : Q \oplus P \rightarrow N$ 을 각 기저에서의 값을 $\psi^{-1} \circ \tilde{\varphi}$ 에서 선택하면 된다. 그리고, 몫 사상을 취해서 $\rho : P \rightarrow N$ 을 구성하면 된다.

2 $\rightarrow$ 정의 6) 사실상 동일한 문장.

Remark

- 사영 가군의 쌍대 개념으로 단사 가군 (injective module)이 있다. 사영 가군의 경우와 유사하게 단사 가군 I 에 대해서 $\text{Hom}_R(-, I)$ 는 완전 함자가 된다.
- 사영 가군으로 구성된 분해 (projective reslution)를 통해서 유도 함자 (derived functor)를 계산할 수 있다. (e.g. Tor, Ext)

정의 7. 사슬 복합체 (Chain Complex) 가군의 모임 $\{C_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ 과 사상 $d_i : C_i \rightarrow C_{i-1}$ 들이 있어서 다음을 만족하면 이를 사슬 복합체라 한다.

$$d_{i-1} \circ d_i = 0 \quad \text{equivalently,} \quad \text{im}(d_i) \leq \ker d_{i-1}.$$

사슬 복합체의 쌍대 개념으로 공사슬 복합체 (cochain complex)를 생각할 수 있다. 공사슬 복합체는 가군의 모임 $\{C^i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ 과 다음을 만족하는 사상 $d^i : C^i \rightarrow C^{i+1}$ 들로 정의된다.

$$d^{i+1} \circ d^i = 0 \quad \text{equivalently,} \quad \text{im}(d^i) \leq \ker d^{i+1}.$$

여기서 위 조건들을 만족하는 가군 사이의 사상들을 경계 사상 (boundary map)이라 한다. 공사슬 복합체의 경우에는 공경계 사상 (coboundary map)이라 한다.

예제 5. (공)사슬 복합체의 예시들 매끄러운 다양체 (smooth manifold) M 에 미분 형식 (differential form)은 다음 벡터 다발 (vector bundle) $\wedge T^*M \rightarrow M$ 의 단면 (section)으로 정의가 된다. 조금 더 구체적으로 말하자면, 벡터 다발이란 다양체 M 의 각 점 $p \in M$ 마다 벡터 공간 V_p 이 달려있는 것이고, 이때 다양체의 한 점 근처 U 를 고려할 때에 $\bigcup_{p \in U} V_p \times M$ 가 벡터 공간과 다양체의 자명한 곱 $V \times M$ 과 위상 동형인 것이다. (V 는 V_p 와 동형인 벡터 공간) 단면이란 다양체의 각 점을 그 점에 달려있는 공간

$V_p \times M$ 으로 보내는 함수이며, 어떤 범주의 공간을 다루냐에 따라서 단면은 연속, 미분가능, 매끄러움 등의 조건을 만족하여야 한다.

공변 접다발의 외대수 $\wedge T^*M$ 는 지난 겨울방학 강연 (선형대수학과 다중선형사상)에서 잠깐 소개 하였는데 다시 설명하도록 하겠다. T_p^*M 는 다양체 M 의 점 p 에서의 쌍대 벡터(즉, 접벡터 혹은 미분 들의 쌍대)들을 모아놓은 공간이며 T_p^*M 의 교대 텐서들을 모두 모아놓은 대수적 구조가 $\wedge T^*M$ 의 올 (fiber)인 $\wedge T_p^*M$ 에 해당한다. 미분 형식의 예시들은 다음과 같다:

- 0-form 들은 다양체 위의 scalar-valued 함수들에 해당한다.
- $\mathbb{R}^2$ 의 1-form $-ydx + xdy$ 을 S^1 에 제한하면 닫힌 형식이지만 완전 형식은 아닌 1차 미분형식 $d\theta$ 를 구할 수 있다.
- 위치와 운동량 좌표 $(x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n)$ 로 이루어진 $2n$ -차원 phase space 에서 2-form $\sum_{i=1}^n dx_i \wedge dp_i$ 는 사교 구조의 가장 간단한 예시이다. 임의의 사교 형식은 국소 좌표계에서 이러한 형태로 쓰일 수 있음이 알려져있다. (다르부 정리)

미분 형식에 외미분 (exterior derivative)이라는 미분 연산을 정의할 수 있다. k -차 미분 형식은 k -차 공사슬을, 외미분은 공경계 사상을 이룬다. 미분 형식이 국소 좌표 계로 쓰였을 때에 외미분은 다음과 같이 정의된다.

$$\text{Let } \omega = \sum w_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}.$$

$$\text{Then, } d\omega := \sum \frac{\partial w_{i_1 \dots i_k}}{\partial x_j} dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}.$$

가장 간단한 경우 (f is 0-form)에 대해 $d^2 = 0$ 이 실제로 만족됨을 확인해보자.

$$\begin{aligned} d(df) &= d\left(\sum \frac{\partial f}{\partial x_i} dx^i\right), \\ &= \sum_{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} dx^j \wedge dx^i \\ &= \sum_{i < j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} dx^j \wedge dx^i + \sum_{i > j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} dx^j \wedge dx^i \\ &= \sum_{i < j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} dx^j \wedge dx^i - \sum_{i < j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} dx^j \wedge dx^i \\ &= 0. \end{aligned}$$

외미분은 국소 좌표계의 변환에 대해 불변하므로 벡터 다발에 대역적으로 정의되는 연산임을 알 수 있다. 사실은 외미분은 당김과 가환이다. 이를 가장 간단한 경우에

대해 확인해보자.

$$\begin{aligned}
d(\phi^* f) &= d(f \circ \phi) \\
&= \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial \phi^i}{\partial y_j} dx^j \\
&= \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} d(x^i \circ \phi) \\
&= \phi^*(df).
\end{aligned}$$

따라서, 미분 형식과 외미분은 공사슬 복합체를 이룸을 알 수 있다.

사슬 복합체의 예시도 하나 알아보도록 하자. 단체 (simplex)란 사면체의 일반화인데 간단하게 $\mathbb{R}^{n+1}$ 상에서 $e_0, \dots, e_n$ 을 꼭짓점으로 갖는 n -차원 도형을 n -단체로 생각하면 된다. n -단체를 $\Delta^n = [e_0, \dots, e_n]$ 로 표기하자. 다양체 M 에서 특이 단체 (singular simplex)란 Δ^n 에서 M 으로의 연속 함수이다. 특이 단체들의 모임으로 생성되는 자유 가군은 사슬 복합체를 이루는데, n -특이 단체의 정의역을 경계의 각각의 모서리로 제한하고 적절한 방향에 따라 부호를 주는 방식으로 경계 사상을 정의할 수 있다. 구체적으로 다음과 같이 쓸 수 있다:

$$\begin{aligned}
&\text{For } \psi : \Delta^n \rightarrow M, \\
\partial \psi &:= \sum_{k=0}^n (-1)^k \psi_{[e_0, \dots, \hat{e}_k, \dots, e_n]}.
\end{aligned} \tag{2}$$

여기서 $\psi_{[e_0, \dots, \hat{e}_k, \dots, e_n]}$ 는 꼭짓점 e_k 를 제외한 모서리 $n-1$ -단체로 ψ 를 제한한 특이 단체이다. 미분 형식에서와 비슷하게 경계 사상을 두 번 취하면 부호가 상쇄되어서 $\partial^2 = 0$ 를 만족함을 확인할 수 있다.

Remark

- 접다발의 텐서곱이 아닌 공변 접다발을 고려하는 이유는 공변 접다발은 접다발과 달리 당김 (pull back)에 대해 잘 정의가 되기 때문이다.
- 특이 단체로 생성된 자유 가군은 매우 큰 집합인데, 이보다 더 단순한 단체 복합체 (simplicial complex), Δ -복합체, CW-복합체 등의 개념도 있다. triangulation, barycentric subdivision 등을 통해 특이 단체의 계산을 언급한 단순한 복합체들에서의 계산으로 대체할 수 있다.
- 특이 단체 복합체에 Hom 함수를 취하면 공사슬 복합체가 됨을 확인할 수 있다. 이때 공사슬 복합체의 원소는 특이 단체를 스칼라로 보내는 쌍대 원소들이다.

정의 8. (코)호몰로지 ((co)Homology) 사슬 복합체 $\{C_i, \partial_i\}_i$ 가 주어졌을 때에 n -번째 호몰로지 군은 다음과 같이 정의된다:

$$H_n := \ker \partial_n / \text{im} \partial_{n+1}$$

그리고 공사슬 복합체 $\{C^i, \delta^i\}_i$ 에 대해서는 n -번째 코호몰로지 군이 다음과 같이 정의된다:

$$H^n := \ker \delta^n / \text{im} \delta^{n-1}$$

정의 9. 사슬 호모토피 (Chain Homotopy) 사슬 복합체의 범주에서 위상 공간에서의 호모토피에 비유되는 사슬 호모토피 (chain homotopy)를 생각할 수 있다. 두 사슬 복합체 $\{C_i, \partial_i^C\}$, $\{D_i, \partial_i^D\}$ 사이에 사상 $f_*, g_* : C_* \rightarrow D_*$ 이 있고, 사슬들 사이의 사상 $\psi_n : C_n \rightarrow D_{n+1}$ 가 방정식 (3)를 만족하면 $\{\psi_i\}$ 를 사슬 호모토피라 하며, f_* 와 g_* 가 사슬 호모토픽 (chain homotopic)하다고 한다.

$$f_n - g_n = \partial_{n+1}^D \circ \psi_n + \psi_{n-1} \circ \partial_n^C. \quad (3)$$

명제 2. 사슬 호모토픽한 사상은 호몰로지 군에서 같은 사상을 유도한다.

증명 $a \in \ker \partial_n^C$ 에 대해 $f_n(a) - g_n(a) = \partial_{n+1}^D \circ \psi_n(a) + \psi_{n-1} \circ \partial_n^C(a) = \partial_{n+1}^D \circ \psi_n(a) \in \text{im} \partial_{n+1}^D$ 이다.

예제 6. 사슬 사상의 예시 사슬 사상의 조건은 사상과 경계 사상이 교환되는 것이다. 예제 5에서 알아본 경우들에 대해 예시를 들면,

1. 임의의 두 매끄러운 다양체 M, N 에 대해 매끄러운 함수 $f : M \rightarrow N$ 는 당김에 의해 사슬 사상 $\wedge T^k N \rightarrow \wedge T^k M$ 을 유도한다.
2. 특이 사슬 복합체에서는 뭍 (push forward)로 사슬 사상이 정의되는데 구체적으로 다양체 M, N 과 특이 단체 $\sigma : \Delta^n \rightarrow M$ 이 있을 때 $f \circ \sigma : \Delta^n \rightarrow N$ 으로 N 에서의 특이 단체가 정의되고, 뭍이 경계 사상과 교환이 됨을 확인할 수 있다.

다음 정리를 증명을 생략하고 서술하겠다.

정리 3. 위상 공간에서의 호모토픽한 사상은 사슬 복합체에서의 사슬 호모토픽한 사상을 유도한다.

Remark

- 쌍대 관계에 있는 개념들이 모두 반대로 정의됨에 주목하자.
- 두 사슬 복합체 사이의 사상의 합성이 항등 사상과 사슬 호모토픽 하면 사슬 복합체에서의 동형 사상을 주는데, 이는 어떤 사슬 사상이 각 사슬에서 동형인 것과는 다른 개념이다. 전자가 더 강한 조건이며 후자를 quasi-isomorphism이라 한다.
- 위상 동형-호모토피 동형-사슬 호모토피 동형-quasi isomorphic 순으로 영성해지는 것을 알 수 있다.

예제 7. 호몰로지 군의 예시들 자세한 계산은 강연에서 직접 하도록 하고 본 강의록에서는 결과만 나열하겠다.

- 정수 계수 특이 호몰로지 (singular homology)의 몇 가지 기초적인 예제들 :

$$H_k(\mathbb{R}^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & k = 0, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (4)$$

$$H_k(S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & k = 0 \text{ and } n, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (5)$$

식 (4)는 유클리드 공간이 점과 호모토피 동치라는 점에서 쉽게 도출이 되고, 식 (5)는 구의 CW-복합체를 구성하면 쉽게 계산할 수 있다.

- 다음 경우들은 Δ -복합체를 구성해서 조합적으로 계산해낼 수 있다.

$$H_k(\mathbb{T}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & k = 0 \text{ and } 2, \\ \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} & k = 1, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$$H_k(\mathbb{RP}^2) = \begin{cases} \mathbb{Z} & k = 0, \\ \mathbb{Z}_2 & k = 1, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$$H_k(K) = \begin{cases} \mathbb{Z} & k = 0, \\ \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2 & k = 1, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

여기서 $\mathbb{T}$ 는 2차원 원환면, $\mathbb{RP}^2$ 는 사영 평면, K 는 클라인 병이다.

- CW-복합체는 0차원(점)부터 시작하여서 각 차원의 공들을 접착 사상을 통해 붙이는 것으로 이해할 수 있다. 이때 접착 사상이 경계를 몇 번 휘감았는지를 차수 (degree)라 하는데 이를 통해 조합적으로 세포 호몰로지 (cellular homology)를 계산할 수 있다. 아이디어 자체는 간단한데 정의가 까다로우므로 주의하자.

다음 보조정리는 짧은 완전열을 이어붙일 때에 필수적으로 쓰인다. 다음 시간에 알아보겠지만, 공간을 분해하거나 절제하면 짧은 완전열의 모임이 생기는데 이를 하나의 긴 완전열로 이음으로써 분해되거나 절제된 공간의 호몰로지를 통해 원래 공간의 호몰로지를 계산해낼 수 있다.

정리 4. 뱀 보조정리 (Snake Lemma) 다음 가환 그림을 생각하자. 각각의 행은 완전열을 이룬다.

$$\begin{array}{ccccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \longrightarrow & 0 \\ a \downarrow & & b \downarrow & & c \downarrow & & \\ 0 \longrightarrow & A' & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g'} & C' & \end{array}$$

그러면 다음과 같은 긴 완전열이 성립된다:

$$\ker a \longrightarrow \ker b \longrightarrow \ker c \xrightarrow{d} \operatorname{coker} a \longrightarrow \operatorname{coker} b \longrightarrow \operatorname{coker} c$$

여기서 사상 d 를 연결 사상 (connecting morphism)이라 한다.

증명 d 가 잘 정의되는 것을 보이도록 하겠다. 완전열임을 보이는 것은 숙제. 원소 $c' \in \ker c$ 을 고르자. g 가 전사이므로 어떤 $b' \in B$ 가 있어서 $g(b') = c'$ 이다. $c \circ g(b') = g' \circ b(b') = 0$ 이므로 $f'(a') = b(b')$ 가 되는 $a' \in A'$ 가 존재한다. 이렇게 고른 a' 의 $\operatorname{coker} a$ 에서의 동치류 $\bar{a'}$ 를 $d(c')$ 로 정의하자. diagram chasing의 각 단계에서 다른 원소를 고를 경우 어떻게 되는지 확인해보자. 우선 $g(\tilde{b}') = c$ 를 만족하는 $\tilde{b}'$ 를 고르자, 그러면 $g(b' - \tilde{b}') = 0$ 이므로 $b' - \tilde{b}' = f(\Delta a)$ 를 만족하는 $\Delta a \in A$ 가 존재한다. 그러면 $f'(-a(\Delta a) + a') = b(\tilde{b}')$ 이므로 $-a(\Delta a) + a'$ 는 $\tilde{b}'$ 을 diagram chasing한 결과이고 이는 $\operatorname{coker} a$ 에서 a' 와 동일하다. 다음으로 a' 대신 $\tilde{a}' \in A'$ 를 고른 경우를 고려해보자. $f'(a' - \tilde{a}') = b(b') - b(b') = 0$ 이고, f' 가 단사이므로 $a' = \tilde{a}'$ 가 된다.

$\{U, V\}$ 를 다양체 M 의 열린 덮개라 하자. 그리고 i_U, i_V 가 표준적인 포함 함수일때 해당 사상들에 의한 당김은 다음과 같은 공사슬의 사상을 유도한다:

$$\begin{aligned} i_U^* : \Omega^k(M) &\rightarrow \Omega^k(U), \\ i_U^*(\omega) &= \omega|_U. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i : \Omega^k(M) &\rightarrow \Omega^k(U) \oplus \Omega^k(V), \\ i(\omega) &= (\omega|_U, \omega|_V). \end{aligned}$$

그리고 각각의 U, V 에서 $U \cap V$ 으로의 당김을 고려하면 다음과 같은 사상을 구성할 수 있다:

$$\begin{aligned} j : \Omega^k(U) \oplus \Omega^k(V) &\rightarrow \Omega^k(U \cap V), \\ j(\omega, \tau) &= \tau|_{U \cap V} - \omega|_{U \cap V}. \end{aligned}$$

명제 3. 마이어-피토리스 열을 위한 짧은 완전열 (S.E.S for Mayer-Vietoris Sequence)
각각의 $k \geq 0$ 에 대해 다음 열은 완전열이 된다.

$$0 \xrightarrow{0} \Omega^k(M) \xrightarrow{i} \Omega^k(U) \oplus \Omega^k(V) \xrightarrow{j} \Omega^k(U \cap V) \xrightarrow{0} 0.$$

증명 i 가 단사인건 자명, $j \circ i(\omega) = j(\omega|_U, \omega|_V) = \omega|_{U \cap V} - \omega|_{U \cap V} = 0$ 이므로 $\text{im } i \leq \ker j$. $\tau \in \ker j$ 일 경우 $\tau = (\tau_1, \tau_2)$ 는 $U \cap V$ 에서 $\tau_1 = \tau_2$. 따라서, τ_1 과 τ_2 를 이어붙여서 $i(\tilde{\tau}) = \tau$ 인 $\tilde{\tau}$ 를 잡을 수 있음. 마지막으로, $\omega \in \Omega^k(U \cap V)$ 을 잡았을 때 다음 함수들을 생각하자:

$$\begin{aligned} \omega_U &:= \begin{cases} \rho_V(x)\omega(x) & \text{for } x \in U \cap V, \\ 0 & \text{for } x \in V - (U \cap V) \end{cases}, \\ \omega_V &:= \begin{cases} \rho_U(x)\omega(x) & \text{for } x \in U \cap V, \\ 0 & \text{for } x \in U - (U \cap V). \end{cases} \end{aligned}$$

여기서 ρ_U, ρ_V 는 덮개 U, V 에 대한 단위 분할 (partition of unity)이다. 그러면 $j(-\omega_U, \omega_V) = \omega_U|_{U \cap V} + \omega_V|_{U \cap V} = \rho_U\omega + \rho_V\omega = \omega$ on $U \cap V$ 이 되는 것을 확인할 수 있다.

명제 4 마이어-피토리스 열 (Mayer-Vietoris Sequence) 명제 3에서 구성한 짧은 완전열은 뱀 보조정리에 의해 마이어-피토리스 열이라 불리는 다음과 같은 코호몰로지 군들의 긴 완전열을 이룬다.

$$\begin{aligned} \dots &\xrightarrow{j^*} H^{k-1}(U \cap V) \xrightarrow{d^*} H^k(M) \xrightarrow{i^*} H^k(U) \oplus H^k(V) \\ &\xrightarrow{j^*} H^k(U \cap V) \xrightarrow{d^*} H^{k+1}(M) \xrightarrow{i^*} H^{k+1}(U) \oplus H^{k+1}(V) \xrightarrow{j^*} \dots \end{aligned}$$

증명 뱀 보조정리에 의해 다음 완전열이 성립한다.

$$\begin{array}{ccccc} \ker d^k(M) & \longrightarrow & \ker d^k(U) \oplus \ker d^k(V) & \longrightarrow & \ker d^k(U \cap V) \\ & & \searrow d & & \\ \text{coker } d^{k+1}(M) & \longleftarrow & \text{coker } d^{k+1}(U) \oplus \text{coker } d^{k+1}(V) & \longrightarrow & \text{coker } d^{k+1}(U \cap V) \end{array}$$

$H^k(U \cap V)$ 의 원소를 대표하는 $\ker d^k(U \cap V)$ 의 원소 a 에 대해 $i(d^{k+1} \circ d(a)) = d^{k+1}(i \circ d(a)) = d^{k+1}(d^k b, d^k c) = 0$, for some $(b, c) \in \Omega^k(U) \oplus \Omega^k(V)$. i 가 단사이므로 $d(a) \in \ker d^{k+1}(M)$. 따라서, d 가 유도하는 코호몰로지 군에서의 사상은 잘 정의가 된다. 긴 완전열의 완전성을 확인하는 것은 숙제.

정의 10. 상대 (코)호몰로지 (Relative (co)Homology) 위상 공간과 부분공간의 쌍 $(A, X), A \subset X$ 에 의해 구성되는 (공)사슬 복합체 $\{C_i(X)\}, \{C_i(A)\}$ 는 포함 사상에 의해 다음과 같은 짧은 완전열을 이룬다.

$$0 \xrightarrow{0} C_i(A) \xrightarrow{i} C_i(X) \xrightarrow{j} C_i(X)/C_i(A) \xrightarrow{0} 0.$$

따라서, 이 짧은 완전열의 모임은 마이어-피토리스 열의 경우와 같이 다음과 같은 호몰로지의 완전열을 이루게 된다.

$$\cdots \xrightarrow{j^*} H_{k+1}(X, A) \xrightarrow{d^*} H_k(A) \xrightarrow{i^*} H_k(X)$$

$$\xrightarrow{j^*} H_k(X, A) \xrightarrow{d^*} H_{k-1}(A) \xrightarrow{i^*} H_{k-1}(X) \xrightarrow{j^*} \cdots$$

위 표기는 호몰로지의 경우이고, 코호몰로지의 경우도 비슷하다. $H_k(X, A)$ 는 몫 사슬 $\{C_i(X)/C_i(A)\}$ 의 호몰로지 군에 해당한다.

다음 정리를 증명을 생략하고 서술하겠다. 증명은 barycentric subdivision 테크닉이 쓰인다.

정리 5. 절제 정리 (Excision theorem) 위상 공간 X 에서 $U \subset A \subset X$ 를 만족하는 부분공간들을 생각하자. $\bar{U} \subset A^\circ$ 를 만족하면 다음 동형관계가 성립된다.

$$H_*(X \setminus U, A \setminus U) \simeq H_*(X, A).$$

Remark

- 절제 정리와 뱀 보조정리를 통해 마이어-피토리스 열을 유도할 수 있다.

정의 11. 축소 호몰로지 (Reduced Homology) 사슬 복합체를 다음과 같이 확장하고 호몰로지를 취한 것을 축소 호몰로지라 한다.

$$\cdots \longrightarrow C_1 \longrightarrow C_0 \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} 0.$$

여기서 $\epsilon: C_0 \rightarrow \mathbb{Z}$ 는 계수를 모두 더하는 사상이다. 축소 호몰로지는 $\tilde{H}_k$ 로 표기한다. 축소 호몰로지와 원래 호몰로지는 다음과 같은 관계를 갖는다:

$$\tilde{H}_k \simeq H_k, \quad k > 0,$$

$$\tilde{H}_0 \oplus G \simeq H_0.$$

$A \subset X$ 의 상대 호몰로지는 적당한 조건하에서 몫공간의 축소 호몰로지와 동형이다.

$$\tilde{H}_k(X/A) \simeq H_k(X, A).$$

Remark

- 절제 정리와 뱀 보조정리를 통해 마이어-피토리스 열을 유도할 수 있다.
- 푸앵카레 보조정리와 상대 호몰로지, 축소 호몰로지 개념을 통해 구의 호몰로지를 계산할 수 있다. 더 넓게는, CW-복합체의 호몰로지를 계산하기에 용이해진다.

다음은 예제 7를 코호몰로지로 다시 쓴 것이다.

정리 6. 푸앵카레 보조정리 (Poincaré Lemma)

$$H^k(\mathbb{R}^n) = \begin{cases} \mathbb{R} & k = 0, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (6)$$

$$H_c^k(\mathbb{R}^n) = \begin{cases} \mathbb{R} & k = n, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (7)$$

여기서 H_c^* 는 콤팩트 지지집합을 가지는 미분 형식으로 정의된 코호몰로지 군이다.

특이 코호몰로지와 드람 코호몰로지를 구분하기 위해 드람 코호몰로지에는 아래 첨자로 Ω 를 표기하겠다.

정리 7. 드람 정리 (de Rham's Theorem) 매끄러운 다양체 위에 다음과 같이 정의되는 드람 사상은 드람 코호몰로지와 실수 계수를 가지는 특이 코호몰로지 사이의 동형 사상이다.

$$\Psi : H_\Omega^n(M) \rightarrow H^n(M; \mathbb{R}),$$

$$\Psi(\omega)(\sigma) = \int_\sigma \omega$$

증명 다음과 같은 사다리꼴의 가환 그림을 생각하자. 수직 방향 사상들은 드람 사상들이다.

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & H_\Omega^k(U \cup V) & \longrightarrow & H_\Omega^k(U) \oplus H_\Omega^k(V) & \longrightarrow & H_\Omega^{k+1}(U \cap V) \longrightarrow H_\Omega^{k+1}(U \cup V) \longrightarrow \cdots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \cdots & \longrightarrow & H^k(U \cup V) & \longrightarrow & H^k(U) \oplus H^k(V) & \longrightarrow & H^{k+1}(U \cap V) \longrightarrow H^{k+1}(U \cup V) \longrightarrow \cdots \end{array}$$

각각의 $U, V, U \cap V$ 에서의 드람 사상이 동형 사상이면 5항 보조정리에 의해 $U \cup V$ 에서의 드람 사상도 동형 사상이 된다. 이제 M 의 적당한 열린 덮개를 찾아서 위 사실을 반복 적용하면 M 에서의 동형 사상을 얻을 수 있다.

정리 8. 푸앵카레 쌍대성 (Poincaré Duality) 유향 매끄러운 다양체 M 이 좋은 덮개를 가질 때에 다음과 같이 정의되는 사상은 호몰로지 군과 코호몰로지 군 사이의 동형 사상 (8)을 준다.

$$\Phi(\cdot, \cdot) : H_\Omega^q(M) \otimes H_c^{n-q}(M),$$

$$\Phi(\omega, \tau) = \int \omega \wedge \tau$$

$$H_{\Omega}^q(M) \simeq H_c^{n-q}(M)^* \quad (8)$$

M 의 콤팩트 부분 다양체 $i: S \hookrightarrow M$ 에 대응하는 코호몰로지 $H_c^{n-q}(M)$ 의 원소 $[\eta_S]$ 가 유일하게 존재한다. 이 코호몰로지류를 S 의 푸앵카레 쌍대 (Poincaré dual)이라고 한다.

Remark

- 정리 8의 증명은 7과 유사하게 마이어-피토리스 열, 푸앵카레 보조정리를 활용하면 된다.
- M 이 콤팩트일 경우 정리 7과 8을 종합하면 특이 코호몰로지류는 드람 코호몰로지류와 일대일 대응되고, 호몰로지와 코호몰로지는 Φ 가 유도하는 쌍선형 사상에 의해 쌍대 관계가 된다.
- S 의 푸앵카레 쌍대는 S 의 법다발 (normal bundle)의 톰 클래스 (Thom class)와 대응된다. 반대로 벡터 다발 $\pi: E \rightarrow M$ 이 있을 때에 해당 벡터 다발의 톰 클래스는 0-단면의 푸앵카레 쌍대로 표현된다.

정의 12. Tor 함수 (Torsion Functor) R -가군 A 가 있을 때에 각각의 P_i 가 사영 가군인 다음 완전열을 사영 분해 (projective resolution)이라 한다.

$$\cdots \longrightarrow P_2 \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow A \xrightarrow{0} 0.$$

이제 이 분해에서 A 를 제하고 R -가군 B 와 텐서곱을 한 다음 사슬 복합체의 호몰로지 군을 Tor 군이라 하며 $\text{Tor}_i(A, B)$ 로 표기한다.

$$\cdots \longrightarrow P_2 \otimes B \longrightarrow P_1 \otimes B \longrightarrow P_0 \otimes B \longrightarrow 0.$$

정의 13. Ext 함수 (Exterior Functor) R -가군 A 의 사영 분해

$$\cdots \longrightarrow P_2 \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow A \xrightarrow{0} 0.$$

에 $\text{Hom}(\cdot, B)$ 함수를 취하면 다음과 같은 열을 얻는데, 해당 열의 코호몰로지 군을 Ext 군이라 하며 $\text{Ext}^i(A, B)$ 로 표기한다.

$$0 \longrightarrow \text{Hom}(P_0, B) \longrightarrow \text{Hom}(P_1, B) \longrightarrow \text{Hom}(P_2, B) \longrightarrow \cdots$$

명제 5. Ext와 Tor의 완전열 A, B 가 사영 가군일 때에 각각 $\text{Hom}(A, \cdot)$ 과 $B \otimes \cdot$ 은 짧은 완전열에 대해 완전한 함수이다. 따라서 짧은 완전열 (9)에 함수를 취하고 뱀 보조정리를 적용하면 긴 완전열 (10), (11)를 얻게 된다.

$$0 \xrightarrow{0} C \longrightarrow D \longrightarrow E \xrightarrow{0} 0. \quad (9)$$

$$0 \xrightarrow{0} \text{Hom}(A, C) \longrightarrow \text{Hom}(A, D) \longrightarrow \text{Hom}(A, E) \xrightarrow{0} \text{Ext}(A, C) \xrightarrow{0} \text{Ext}(A, D) \xrightarrow{0} \text{Ext}(A, E) \xrightarrow{0} 0. \quad (10)$$

$$0 \xrightarrow{0} \text{Tor}(A, C) \longrightarrow \text{Tor}(A, D) \longrightarrow \text{Tor}(A, E) \xrightarrow{0} A \otimes C \xrightarrow{0} A \otimes D \xrightarrow{0} A \otimes E \xrightarrow{0} 0. \quad (11)$$

예제 8. 예시들 Ext , Tor 함수의 몇 가지 계산을 알아보자.

- P 가 사영 가군일 경우 $\text{Tor}(A, P) = 0$, $\text{Ext}(P, A) = 0$ 임이 알려져있다.
- $\text{Ext}(Z_n, G) \simeq G/nG$ 를 완전열을 통해 계산할 수 있다.
- $\text{Ext}(Z_n, Z_m) \simeq Z_d \simeq Z_n \otimes Z_m \simeq \text{Tor}(Z_n, Z_m)$ ($d = \gcd(n, m)$)를 완전열을 통해 계산할 수 있다.

다음 정리를 증명없이 서술하겠다. 증명은 diagram chase를 하면 된다.

정리 9. 보편 계수 정리 (Universal Coefficient Theorem) 사슬 복합체 $\{C_i\}$ 와 가군 G 에 대해 다음 분할 짧은 완전열이 성립한다.

$$0 \xrightarrow{0} H_n(C_*) \otimes G \xrightarrow{\alpha} H_n(C_* \otimes G) \longrightarrow \text{Tor}(H_{n-1}(C_*), G) \xrightarrow{0} 0.$$

여기서 $\alpha([c] \otimes g) = [c \otimes g]$ 이다.

마이어-피토리스 열을 임의의 가산 열린 덮개로 확장을 해보자. $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$ 를 위상 공간 X 의 열린 덮개라 하자. (J 는 가산 집합) 열린 집합 $U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_k}$ 의 교집합을 $U_{\alpha_1 \dots \alpha_k}$ 로 표기하자. 그러면 k 개 교집합의 분리 합집합의 열을 얻게 된다:

$$M \leftarrow \coprod U_\alpha \hookleftarrow \coprod U_{\alpha\beta} \rightrightarrows \dots \quad (12)$$

여기서 각 화살표들은 예를 들어서 $\partial_0 : U_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2} \hookrightarrow U_{\alpha_1\alpha_2}$ 는 0번째 지수를 무시하는 포함 사상에 해당한다. 이 사상들에 의해 외대수에서의 열을 얻게 된다:

$$\Omega^*(M) \rightarrow \prod \Omega^*(U_\alpha) \rightrightarrows \prod \Omega^*(U_{\alpha\beta}) \rightrightarrows \dots \quad (13)$$

이 열에서 화살표들은 포함 사상에 의해 유도되는 제한 사상 $\delta_k : \Omega^*(U_{\alpha_{i_1} \dots \hat{\alpha}_{i_k} \dots \alpha_{i_n}}) \rightarrow \prod \Omega^*(U_{\alpha_{i_1} \dots \alpha_{i_n}})$ 에 해당하게 된다. 이 사상들을 조합해서 다음과 같은 사상을 정의하자:

$$\begin{aligned} \text{For } \omega &= (\omega_{\alpha_0 \dots \alpha_p}) \in \prod \Omega^q(U_{\alpha_0 \dots \alpha_p}), \\ (\delta\omega)_{\alpha_0 \dots \alpha_{p+1}} &:= \sum_{i=0}^{p+1} (-1)^i \omega_{\alpha_0 \dots \hat{\alpha}_i \dots \alpha_{p+1}} \end{aligned} \quad (14)$$

명제 6. $\delta^2 = 0$ 이다.

증명

$$\begin{aligned} (\delta^2\omega)_{\alpha_0 \dots \alpha_{p+1}} &= \sum (-1)^i (\delta\omega)_{\alpha_0 \dots \hat{\alpha}_i \dots \alpha_{p+2}} \\ &= \sum_{j < i} (-1)^j (-1)^i (\delta\omega)_{\alpha_0 \dots \hat{\alpha}_i \dots \hat{\alpha}_j \dots \alpha_{p+2}} \\ &\quad + \sum_{j > i} (-1)^j (-1)^i (\delta\omega)_{\alpha_0 \dots \hat{\alpha}_i \dots \hat{\alpha}_j \dots \alpha_{p+2}} \\ &= 0. \end{aligned}$$

명제 7. 마이어-피토리스 열의 일반화 (The Generalized Mayer-Vietoris Sequence)
 다음 열은 완전열이다.

$$0 \xrightarrow{0} \Omega^*(M) \xrightarrow{r} \prod \Omega^*(U_\alpha) \xrightarrow{\delta} \prod \Omega^*(U_{\alpha_0\alpha_1}) \xrightarrow{\delta} \cdots.$$

여기서 r 은 각 U_α 로의 제한 사상이다.

증명 각 열린 덮개의 교집합에서 일치하는 것과 $\Omega^*(M)$ 의 원소가 잘 정의되는 것은 동치이므로 $\text{im } r = \ker \delta$. 명제 6에 의해 임의의 cocycle이 coboundary라는 것 ($\ker \delta_{n+1} \leq \text{im } \delta_n$)만 보이면 된다. $\omega \in \prod \Omega^*(U_{\alpha_0 \dots \alpha_p})$ 가 p -cocycle이라 하자. $(p-1)$ -cocycle τ 를 다음과 같이 정의하자:

$$\tau_{\alpha_0 \dots \alpha_{p-1}} = \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} \omega_{\alpha \alpha_0 \dots \alpha_{p-1}}.$$

여기서 $\{\rho_{\alpha}\}$ 는 단위 분할이다. ω 가 cocycle이므로 다음 식이 성립한다.

$$(\delta\omega)_{\alpha\alpha_0 \dots \alpha_p} = \omega_{\alpha_0 \dots \alpha_p} + \sum_i (-1)^{i+1} \omega_{\alpha\alpha_0 \dots \hat{\alpha}_i \dots \alpha_p} = 0.$$

따라서,

$$\begin{aligned} (\delta\tau)_{\alpha\alpha_0 \dots \alpha_p} &= \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} \sum_i (-1)^i \omega_{\alpha_0 \dots \alpha_p} \\ &= \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} \omega_{\alpha_0 \dots \alpha_p} \\ &= \omega_{\alpha_0 \dots \alpha_p}. \end{aligned}$$

이제 명제 7의 완전열을 열 방향으로 죽 나열하면 다음과 같은 도식을 얻게 된다. 여기서 $K^{p,q} := C^p(\mathcal{U}, \Omega^q) = \prod \Omega^q(U_{\alpha_0 \dots \alpha_p})$ 이다. 각각의 $K^{p,q}$ 는 q -형식들의 덮개 $\mathcal{U}$ 에 대한 p -공사슬이다. 이러한 구조를 이중복체 (double complex)라고 한다.

$\Omega^q(M)$	$K^{0,q}$	$K^{1,q}$	$K^{2,q}$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	
$\Omega^2(M)$	$K^{0,2}$	$K^{1,2}$	$K^{2,2}$	$\dots$	$K^{p,2}$
$\Omega^1(M)$	$K^{0,1}$	$K^{1,1}$	$K^{2,1}$	$\dots$	$K^{p,1}$
$\Omega^0(M)$	$K^{0,0}$	$K^{1,0}$	$K^{2,0}$	$\dots$	$K^{p,0}$
	$C^0(\mathcal{U}, \mathbb{R})$	$C^1(\mathcal{U}, \mathbb{R})$	$C^2(\mathcal{U}, \mathbb{R})$	$\dots$	$C^p(\mathcal{U}, \mathbb{R})$

위 이중복체의 수평 방향 공경계 사상들은 δ 에 해당하고 수직 방향 공경계 사상들은 외미분 d 에 해당한다. 이제 이 이중복체에 δ, d 를 조합하여 하나의 공경계 사상을 정의할 수 있으며 이를 통해 이중복체를 하나의 공사슬 복합체로 만들 수 있다.

정의 14. 체흐-드람 복합체 (Čech-de Rham Complex) 이중복체의 합 $C^*(\mathcal{U}, \Omega^*) := \bigoplus_{p,q \geq 0} C^p(\mathcal{U}, \Omega^q)$ 위에 다음과 같은 연산 D 를 정의하자:

$$D = D' + D'' = \delta + (-1)^p d.$$

그러면 $(C^*(\mathcal{U}, \Omega^*), D)$ 는 공사슬 복합체가 되고, 따라서 코호몰로지 $H_D\{C^*(\mathcal{U}, \Omega^*)\}$ 를 정의할 수 있다.

체흐-드람 복합체에서 D -cocycle은 예를 들어 $\phi = a + b + c$ 일 경우,

$$\begin{aligned} da &= 0, \\ \delta a &= \pm db, \\ \delta b &= \pm dc, \\ \delta c &= 0 \end{aligned}$$

와 같이 D 를 취했을 때에 지그-재그 형식으로 맞아 떨어져서 0이 되는 공사슬이다.

정리 10. 체흐 코호몰로지 (Čech Cohomology)와 드람 코호몰로지의 동형 관계 체흐 코호몰로지 $H^*(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ 는 '좋은' 덮개 $\mathcal{U}$ 위의 국소적 상수 함수들에 미분 사상 δ 를 통해 조합론적으로 정의된다. 이때 체흐-드람 복합체를 통해서 체흐 코호몰로지와 드람 코호몰로지를 연결시킬 수 있는데, 이를 수식으로 쓰면 다음과 같다.

$$H_{\text{DR}}^*(M) \simeq H_D\{C^*(\mathcal{U}, \Omega^*)\} \simeq H^*(\mathcal{U}, \mathbb{R}).$$

증명 이중복체의 (p, q) D -cocyle에서 가장 작은 p 의 성분은 δ 를 취하면 0이 된다. 이때 마이어-피토리스 원리에 의해 그 성분은 어떤 $(p, q-1)$ 공사슬의 상에 해당하는 데, 이 상을 원래 공사슬에서 빼주면 코호몰로지 류는 유지되면서 공사슬의 가장 작은 성분을 $p+1$ 로 만들 수 있다. 이 과정을 반복하면 전역적으로 정의된 공사슬을 얻게 된다. 이를 통해 $r^* : H_{\text{DR}}^*(M) \rightarrow H_D\{C^*(\mathcal{U}, \Omega^*)\}$ 이 전사임을 알 수 있으며 단사임을 보이는 것도 비슷하게 증명하면 된다. 같은 방식으로 $H_D\{C^*(\mathcal{U}, \Omega^*)\} \simeq H^*(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ 도 보일 수 있다. 이때 열방향 완전열이 성립하는 덮개를 '좋은' 덮개로 보면 된다.

이중복체를 활용하여 공간의 곱의 경우 코호몰로지가 어떻게 계산 되는지 알아보자.

명제 8. 쾨네티 공식 (Künneth Formula) M 과 F 가 유한 차원 코호몰로지를 가질 때에 $M \times F$ 의 드람 코호몰로지는 다음과 같다.

$$H^n(M \times F) = \bigoplus_{p+q=n} H^p(M) \otimes H^q(F).$$

증명 $E = M \times B$ 로 표기하면 다음과 같은 도식을 생각할 수 있다:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\rho} & F \\ \pi \downarrow & & \\ M & & \end{array}$$

사영 $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ 가 M 의 좋은 열린 덮개일 때, $\pi^{-1}\mathcal{U} = \{\pi^{-1}U_\alpha\}$ 는 E 의 덮개가 될 것이다. (꼭 좋은 덮개가 되지는 않는다.) $H^*(F)$ 의 기저 $\{[\omega_\alpha]\}$ 를 잡자 그러면 다음과 같은 이중복체간의 사상을 얻을 수 있다:

$$\pi_{\mathcal{U}}^*([\omega_\alpha] \otimes \phi) = \rho^* \omega_\alpha \wedge \pi^* \omega.$$

해당 이중복체들의 코호몰로지는 각각 $H^*(E)$, $H^*(F) \otimes H^*(M)$ 이므로 $\pi_{\mathcal{U}}^*$ 가 D -코호몰로지에서 동형 사상을 정의함을 보이면 된다. $C^p(\pi^{-1}\mathcal{U}, \Omega^*)$ 의 수직 방향 코호몰로지에서 켤레곱과 당김에 의해 다음과 같은 동형 관계를 얻게 된다:

$$\prod H^*(\pi^{-1}U_{\alpha_0 \dots \alpha_p}) \simeq H^*(F) \otimes \prod H^*(U_{\alpha_0 \dots \alpha_p}). \quad (15)$$

$f: K \rightarrow K'$ 가 이중복체 간의 사상(차수를 보존하고 d, δ 와 가환이어야 한다.)일 때에 f 가 H_d 동형을 유도하면 H_d 의 동치류 ω 는 H_D 의 동치류로 확장될 수 있고, 유도된 사상 f^* 가 d, δ 와 가환이므로 D 와 가환이 되어서 H_D 의 사상을 유도하게 된다. 이 때에 H_d 에서 동형 관계를 유도 했으므로 H_D 에서도 동형 관계를 유도함을 쉽게 확인할 수 있다. 이 사실을 우리의 경우에 적용하면 식 (15)는 H_D 에서의 동형 사상을 정의하게 된다.

정의 15. 준층 (Presheaf) 위상 공간 X 위에 정의된 준층 $\mathcal{F}$ 은 X 의 열린 집합 $U \subseteq X$ 마다 가환 대수구조(e.g. 가환군, 환, 가군, ...) $\mathcal{F}(U)$ 이 대응되고, 각각의 포함 사상 $i_U^V: V \hookrightarrow U$ 마다 제한 사상 $\mathcal{F}(i_U^V): \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$ 이 대응되며 다음 조건들을 만족하는 구조이다.

- $\mathcal{F}(i_U^U) = id_{\mathcal{F}(U)}$.
- $\mathcal{F}(i_V^W) \circ \mathcal{F}(i_U^V) = \mathcal{F}(i_U^W)$.

X 의 열린 덮개에 대해 준층의 복합체를 구성할 수 있다. 예를 들어 $C^k(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ 는 $\prod_{\alpha_0 < \dots < \alpha_p} \mathcal{F}(U_{\alpha_0} \cap \dots \cap U_{\alpha_p})$ 이다. 이제 식 (12)에서 각각의 화살표들은 포함 사상이므로 식 (13)와 유사하게 다음 열을 얻게 된다:

$$\prod \mathcal{F}(U_\alpha) \rightarrow \prod \mathcal{F}(U_{\alpha\beta}) \rightrightarrows \prod \mathcal{F}(U_{\alpha\beta\gamma}) \rightrightarrows \dots$$

식 (14)와 같은 방식으로 제한 사상의 교대합으로 $\delta: C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow C^{p+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ 을 정의할 수 있다. 그러면 명제 6과 똑같은 방식으로 $\delta^2 = 0$ 이 됨을 알 수 있고, 따라서 코호몰로지 군 $H^*(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ 을 정의할 수 있다. 이 군은 $H_\delta C^*(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ 로도 쓰는데, 준층의 코호몰로지도 준층이 되기 때문에 반복하여 코호몰로지를 취할 수 있기 때문이다. 스펙트럼 열에 대해 논의할 때에 $H_d H_\delta C^*(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ 등도 등장할 것이다. 이 코호몰로지 군은 덮개의 세분에 대해 유허체계 (direct system)이루게 된다. 따라서, 직접 극한 (direct limit)을 취해서 다음 정의를 하게 된다.

정의 16. 체흐 코호몰로지 (Čech Cohomology) 위상 공간 X 의 준층 $\mathcal{F}$ 의 체흐 코호몰로지는 다음과 같이 정의된다.

$$H^*(X, \mathcal{F}) := \lim_{\mathcal{U}} H^*(\mathcal{U}, \mathcal{F}).$$

참고 문헌

- Algebraic Topology, Allen Hatcher.
- Topology and Geometry, Glen E. Bredon.
- An Introduction to Manifolds, Loring Tu.
- Differential Forms in Algebraic Topology, Raoul Bott and Loring Tu.
- nLab.
- Wikipedia.