해석개론

Yeryang Kang

February 20-21, 2025

1 실직선의 위상

어떤 집합에서 그 집합의 임의의 두 원소 사이에 적당한 방법으로 원근 관계가 정의되어 있을 때 이 집합 위에 위상적 구조가 주어져 있다고 말한다. 실직선 R 에서 두 점 사이의 거리를 이용하여 R의 두 원소 사이에 원근 관계를 정의할 수 있으므로, 실직선 R 위에는 위상적 구조가 주어져 있는 것이다.

실수 집합 R에 부여될 수 있는 여러 구조 중, 학부 실해석학에서 가장 중요하게 사용되는 세 가지 구조는 대수적 구조, 순서구조, 위상적 구조이다. R의 간단한 위상적 구조를 공부하는 것에 대하여는 첫째로, 실수계 자체의 구조를 좀더 깊이 이해할 수 있으며 둘째로는 R의 위상적 성질을 바탕으로 하여 극한 및 연속성의 개념을 좀더 명확히 파악할 수 있는 기틀을 마련할 수 있다는 장점이 있다.

keywords

근방, 개집합, 내점과 집적점, 개집합 폐집합의 특성화, 볼차노 바이어슈트라스 정리, 하이네 보렐 정리, R의 부분집합의 연결성

1.1.1 개집합, 폐집합 정의

실수의 집합 $\mathbb{R}$의 부분집합 O의 각 점 $x \in O$에 대하여, 이에 대응하는 적당한 $\epsilon > 0$이 존재하여 $N(x, \epsilon) \subset O$가 될 때, 집합 O를 *개집합 (open set)*이라고 한다. 또

부분집합 $F \subset \mathbb{R}$의 여집합 F^c가 개집합이 될 때, 집합 F를 *폐집합 (closed set)* 이라고 한다.

1.2.1 내점, 집적점 정의

점 a가 $S \subseteq \mathbb{R}$에 대하여 이에 대응하는 적당한 $\epsilon > 0$이 존재하여 $N(a, \epsilon) \subseteq S$가 될 때, 점 a를 S의 *내점 (interior point)*이라고 한다. **S가 $\mathbb{R}$의 부분집합이라 하고 a가 $\mathbb{R}$의 원소라고 하자. 임의의 ϵ 근방에 대하여 $(S \setminus \{a\}) \cap N(a, \epsilon) \neq \varnothing$일 때, 즉 a의 임의의 ϵ 근방 $N(a, \epsilon)$이 점 a와 다른 점 $x \in S$를 적어도 하나 포함할 때, 점 a를 S의 *집적점 (accumulation point)*이라고 한다.**

1.2.2 개집합의 특성화, 폐집합의 특성화($\overline{F} = F$)

집합 $O \subseteq \mathbb{R}$가 개집합일 필요충분조건은 각 점 $x \in O$가 O의 내점이 되는 것이다. 집합 $F \subseteq \mathbb{R}$가 폐집합일 필요충분조건은 F의 도집합 F'이 F의 부분집합인 것이다. 또한 이는 $F = \overline{F}$와 동치이다.

다음의 세 정리는 서로 동치이다. 이는 실수집합의 완비성에서 비롯된 성질로 이들은 특히 각각 정리의 증명, 공리로서의 역할, 실수를 구성하는 한 방법으로서 그 의미가 있다.

1.3.1 축소구간정리-데데킨트정리-완비성공리 (TFAE)

축소구간 정리
폐구간열 $\{I_n\}$에 있어서 모든 자연수 n에 대하여 I_n이 유계이고, $I_n \supseteq I_{n+1}$인 경우,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \varnothing$$

이 성질을 만족한다.

완비성 공리
$\mathbb{R}$의 공집합이 아닌 부분집합 S가 위로 유계이면, 반드시 그 상한이 존재한다.

데데킨트 정리

$\mathbb{R}$의 두 부분집합 A와 B가 다음의 성질을 만족한다고 하자:

1. $A \cup B = \mathbb{R}$

2. $A \neq \varnothing$, $B \neq \varnothing$

3. **임의의** $a \in A$, $b \in B$**에 대해** $a < b$

이때 임의의 $a \in A$, $b \in B$**에 대해,** $a \leq \alpha$**이고** $\alpha \leq b$**인 유일한** $\alpha \in \mathbb{R}$**이 존재한다.**

1.3.2 (corollary) 볼차노 바이어슈트라스 정리

유계인 임의의 무한집합 S**는 반드시 적어도 하나의 집적점을 가진다.**

1.4.1 covering(피복)- open, finite의 정의

집합 E**를 실수 집합** $\mathbb{R}$**의 부분집합이라 하자. 집합족** $\mathscr{C} = \{O_\alpha \mid \alpha \in I\}$**가**

$$E \subseteq \bigcup_{\alpha \in I} O_\alpha$$

를 만족하면, 즉, E**의 임의의 점** $x \in E$**에 대하여** $x \in O_\alpha$**인** $\mathscr{C}$**의 원소** O_α**가 적어도 하나 존재하면, 집합족** $\mathscr{C}$**를 ****E**의 피복 (covering of** E**)**이라고 한다.**

특히, $\mathscr{C}$**의 각 원소** O_α $(\alpha \in I)$**가 개집합이면,** $\mathscr{C}$**를 ****E**의 개피복 (open covering)**이라고 한다.**

집합족 $\mathscr{C}$**의 부분집합족** $\mathscr{D}$ $(\mathscr{D} \subseteq \mathscr{C})$**가 다시** E**의 피복이면,** $\mathscr{D}$**를 ****$\mathscr{C}$**의 부분피복 (subcovering)**이라 한다.**

특히, $\mathscr{D}$**가** $\mathscr{C}$**의 유한 개의 원소** $O_1, O_2, \ldots, O_n$**으로 이루어진 경우, 즉,** $\mathscr{D}$**가** $\mathscr{C}$**의 유한 부분집합족이면** $\mathscr{D}$**를 ****$\mathscr{C}$**의 유한부분피복 (finite subcovering)**이라고 한다.**

1.4.2 컴팩트 집합의 정의

E**를 실수 집합** $\mathbb{R}$**의 부분집합이라고 하자.** E**의 임의의 개피복이 유한부분피복을 가질 때,** E**를 **컴팩트 집합 (compact set)**이라고 한다.**

1.4.3 컴팩트 집합의 부분집합도 컴팩트 집합이다

실수 집합 $\mathbb{R}$의 부분집합 $F \subseteq \mathbb{R}$을 폐집합이라고 하자. F가 어떤 컴팩트 집합 K의 부분집합이면, F 역시 컴팩트 집합이다.

1.4.4 하이네 보렐 정리

실수 집합 $\mathbb{R}$의 부분집합 K가 컴팩트일 필요충분조건은 K가 유계인 폐집합이다.

1.5.1 비연결집합- 연결집합의 정의

집합 E를 실수 집합 $\mathbb{R}$의 부분집합이라고 하자. 다음 조건을 만족하는 개집합 A, B가 존재할 때, E를 **비연결집합 (disconnected set)이라고 한다.**

1. $(A \cap E) \cap (B \cap E) = \emptyset$
2. $(A \cap E) \cup (B \cap E) = E$
3. $A \cap E \neq \emptyset$, $B \cap E \neq \emptyset$

실수 집합 $\mathbb{R}$의 부분집합 E가 비연결집합이 아닐 때, 이를 **연결집합 (connected set)이라고 한다. 즉, 위의 조건 (1), (2), (3)을 만족시키는 개집합 A, B가 존재하지 않을 때, E를 **연결집합**이라고 한다.**

1.5.2 연결집합일 필요충분조건 및 연결집합의 종류

실수 집합 $\mathbb{R}$의 부분집합 E가 연결집합일 필요충분조건은 E가 다음 성질을 만족하는 것이다.

> **만약 $a, b \in E$이고 $a < c < b$이면 $c \in E$이다.**

실수 집합 $\mathbb{R}$의 부분집합 E가 공집합이 아니고 하나의 원소만으로 이루어진 집합도 아니라고 하자. E가 연결집합일 필요충분조건은 E가 **구간 (interval)인 것이다.**

2 수렴

수열의 수렴성, 함수열의 수렴성, 급수의 수렴성, 함수항급수의 수렴성에 대해 다룬다.

2.1 극한의 개념 중에서 가장 기본이 되는 수열의 수렴성을 다룬다.

2.1.1 수열의 수렴의 정의

수열 $\langle x_n \rangle$에 대하여, 적당한 실수 x가 존재해서 다음 명제를 만족하면, 수열 $\langle x_n \rangle$이 극한 x에 수렴한다고 한다:

임의의 $\epsilon > 0$에 대하여, 이에 대응하는 적당한 자연수 $K(\epsilon) = K$가 존재하여, $n > K$인 모든 자연수 n에 대하여

$$|x_n - x| < \epsilon$$

를 만족한다.

2.1.2 수열의 극한의 유일성

수열 $\langle x_n \rangle$이 수렴하면, 그 극한은 유일하다.

2.1.3 수렴하는 수열은 유계 (관련: 2.4)

수렴하는 수열 $\langle x_n \rangle$은 유계이다.

2.2 실수에서의 사칙연산이 모티브인 수열에서의 사칙연산을 생각한다

2.2.1

실수열 전체의 집합은 vector space이다. 수렴하는 실수열들 전체의 집합은 vector space이다.
→ 부분집합이 같은 대수적 성질을 가지고 있다는 사실은 매우 흥미롭다.

2.3 부분수열의 개념, weierstrass 정리를 소개한다

2.3.1 부분수열의 정의

수열 $\{x_n\}$을 주어진 수열이라고 하자. 자연수의 집합 $\mathbb{N}$에서의 수열 $\{n_k\}$가 **순증가 수열일 때, 수열 $\{x_{n_k}\}$를 $\{x_n\}$의 **부분수열(subsequence)**이라고 한다.**

2.3.2 원수열이 수렴하면 부분수열도 수렴하며 그 극한값은 같다 (see 2.7.1)

만약 $x_n \to x$ 라면, 모든 부분수열 x_{n_k} 또한 x 로 수렴한다.

2.3.3 집적점과 수열

x가 실수의 부분집합 E의 **집적점일 때, x에 수렴하는 E에서의 수열이 존재한다. 즉,**

$$x \in E' \Rightarrow \exists \{x_n\} \subset E, \quad x_n \to x.$$

2.3.4 Bolzano-Weierstrass 정리

모든 **유계 실수열은 반드시 **수렴하는 부분수열**을 가진다. 즉, 만약 $\{x_n\}$이 유계라면,**

$$\exists \textbf{ 부분수열 } \{x_{n_k}\} \textbf{ such that } x_{n_k} \to L \textbf{ for some } L \in \mathbb{R}.$$

2.4 수열의 극한을 추정하지 않고도 (앞에서는 모두 그러한 방법들이 었는데) 수열의 수렴성을 판정하는 두 가지 방법 [단조수렴정리, 코시판정법] 또한 이들은 실수계의 완비성공리로부터 얻어진다.

2.4.1 단조수열의 정의

수열 $\{x_n\}$에서 모든 자연수 n에 대하여 $x_n \le x_{n+1}$ $[x_n \ge x_{n+1}]$인 관계를 만족하면, $\{x_n\}$을 단조증가수열[단조감소수열]이라고 한다. 단조증가 또는 단조감소 수열을 통틀어 단조수열(monotone sequence)이라고 한다.

2.4.2 단조수렴정리

(1) $\{x_n\}$**을 단조증가수열이라고 할 때, (a)** $\{x_n\}$**이 위로 유계이면,** $\{x_n\}$**은 수렴하고 그 극한은**

$$\lim_{x\to\infty} x_n = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$$

(b) $\{x_n\}$**이 위로 유계가 아니면,**

$$\lim_{x\to\infty} x_n = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\} = \infty$$

(2) $\{x_n\}$**을 단조감소수열이라고 할 때, (a)** $\{x_n\}$**이 아래로 유계이면,** $\{x_n\}$**은 수렴하고 그 극한은**

$$\lim_{x\to\infty} x_n = \inf\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$$

(b) $\{x_n\}$**이 아래로 유계가 아니면,**

$$\lim_{x\to\infty} x_n = \inf\{x_n : n \in \mathbb{N}\} = -\infty$$

단조수렴정리로부터 유계인 단조수열은 반드시 수렴한다. 또한 수렴하는 수열은 반드시 유계이다. 따라서 단조수열이 수렴할 필요충분조건은 유계인 것이다.

2.4.3 코시수열의 정의

수열 $\{x_n\}$**에 있어서, 명제 임의의** $\epsilon > 0$**에 대하여, 이에 대응하는 적당한 자연수** $K = K(\epsilon)$**가 존재하여** $n > m > K$**인 모든 자연수** n, m**에 대하여**

$$|x_n - x_m| < \epsilon$$

를 만족하면, $\{x_n\}$**을 코시수열(Cauchy sequence)이라고 한다.**

2.4.4-2.4.6 일련의 fact들

(1) 임의의 수렴하는 수열은 코시 수열이다.

(2) 모든 코시 수열은 반드시 유계이다.

(3) 코시수열의 모든 부분수열은 코시 수열이다. 또한, 코시 수열의 어떤 한 부분수열이 실수 x**에 수렴하면, 원수열도** x**에 수렴한다.**

2.4.7 실수열이 수렴할 필요충분조건은 코시열인 것이다

2.5 극한은 수렴하는 수열에 대한 개념이다. 그러나 모든 수열이 수렴하지는 않는다. 수렴하는 수열에 대한 개념인 상극한/하극한 개념을 소개한다.

2.5.1 상극한/하극한의 정의

수열 $\langle x_n \rangle$을 주어진 수열이라고 하자. 각 자연수 k에 대하여 집합 $A_n = \{x_n : n \geq k\}$를 정의하고, A_k의 상한과 하한을 각각 s_k, l_k라고 하자. 집합열 $\langle A_k \rangle$는

$$A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots$$

인 관계가 성립하므로, 수열 $\langle s_k \rangle$는 단조감소하고, 한편 수열 $\langle l_k \rangle$는 단조증가한다. 이때 수열 $\langle x_n \rangle$의 상극한(limit superior, upper limit)을

$$\lim_{k\to\infty} s_k = \inf\{s_k : k \in \mathbb{N}\}$$

으로 정의한다. 또, 수열 $\langle x_n \rangle$의 하극한(limit inferior, lower limit)을

$$\lim_{k\to\infty} l_k = \sup\{l_k : k \in \mathbb{N}\}$$

으로 정의한다.

2.5.2 유계수열/비유계수열의 상극한/하극한

(1) 수열 $\langle x_n \rangle$이 위로 유계이면, $\langle s_k \rangle$도 또한 위로 유계가 되므로 수열 $\langle x_n \rangle$의 상극한은

$$\limsup x_n = \lim_{k\to\infty} s_k = \inf\{s_k : k \in \mathbb{N}\} = \inf_k \sup_{n\geq k} x_n$$

이 되고, 한편 수열 $\langle x_n \rangle$이 위로 유계가 아니면, $\langle s_k \rangle$도 또한 위로 유계가 안 되므로 수열 $\langle x_n \rangle$의 상극한은

$$\limsup x_n = \infty$$

가 된다. (2) 수열 $\langle x_n \rangle$이 아래로 유계이면, $\langle l_k \rangle$도 또한 아래로 유계가 되므로 수열 $\langle x_n \rangle$의 하극한은

$$\liminf x_n = \lim_{k\to\infty} l_k = \sup\{l_k : k \in \mathbb{N}\} = \sup_k \inf_{n\geq k} x_n$$

이 되고, 한편 수열 $\langle x_n \rangle$이 아래로 유계가 아니면, $\langle l_k \rangle$도 또한 아래로 유계가 안 되므로 수열 $\langle x_n \rangle$의 하극한은

$$\liminf x_n = -\infty$$

가 된다.

2.5.3 상극한/하극한임과 동치인 명제

(1) 수열 $\langle x_n \rangle$이 유계이고, 그 상극한을 s라고 하자. 이는 다음 두 명제 (a) & (b)와 동치이다.

(a) 임의로 주어진 $\epsilon > 0$에 대하여, 이에 대응하는 적당한 자연수 K가 존재하여, $n \geq K$인 모든 자연수 n에 대하여 다음이 성립한다.

$$x_n < s + \epsilon$$

(b) 임의로 주어진 $\epsilon > 0$과 임의의 자연수 n에 대하여,

$$s - \epsilon < x_m$$

가 성립하는 $m \geq n$인 적당한 자연수 m이 반드시 존재한다.

(2) 수열 $\langle x_n \rangle$이 유계이고, 그 하극한을 l이라고 하자. 이는 다음 두 명제 (a) & (b)와 동치이다.

(a) 임의로 주어진 $\epsilon > 0$에 대하여, 이에 대응하는 적당한 자연수 K가 존재하여, $n \geq K$인 모든 자연수 n에 대하여 다음이 성립한다.

$$l - \epsilon < x_n$$

(b) 임의로 주어진 $\epsilon > 0$과 임의의 자연수 n에 대하여,

$$x_m < l + \epsilon$$

가 성립하는 $m \geq n$인 적당한 자연수 m이 반드시 존재한다.

2.5.4 상극한/하극한에 대한 부등식

다음은 fact로 받아들인다.

수열 $\langle x_n \rangle$과 $\langle y_n \rangle$이 유계라고 할 때, 다음이 성립한다.

(a) $\liminf x_n + \liminf y_n \le \liminf(x_n + y_n)$

(b) $\limsup(x_n + y_n) \le \limsup x_n + \limsup y_n$

(c) $c \ge 0$**이면** $\limsup cx_n = c \limsup x_n$**이고,** $\liminf cx_n = c \liminf x_n$**이다.**

(d) $\liminf(-x_n) = -\limsup x_n$**이고** $\limsup(-x_n) = -\liminf x_n$**이다.**

2.6 실수열의 수렴성과 극한에서 나아가 함수열의 수렴성과 극한함수에 대해 논한다

2.6.1 함수열의 정의

D**를 실수의 집합** $\mathbb{R}$**의 부분집합이라고 하자. 각 자연수** n**에 대하여 함수** $f_n : D \to \mathbb{R}$**이 정의되어 있을 때, 함수** f_n**들을 차례로 나열시킨 것을** D **위에서 정의된 함수열 (sequence of functions defined on** D**)이라고 한다. 즉, 집합** Ω**를 함수** $f_n : D \to \mathbb{R}$**들로 이루어진 집합이라 할 때, 함수** $\phi : \mathbb{N} \to \Omega$**를** D **위에서 정의된 함수열이라고 하고, 기호로는**

$$\phi = \langle f_n \rangle$$

으로 나타낸다.

2.6.2 점별수렴의 정의

D**를 실수의 집합** $\mathbb{R}$**의 부분집합이라고 하고** $\langle f_n \rangle$**을** D **위에서 정의된 함수열이라고 할 때, 각 점** $x \in D$**에 대응된 수열** $\langle f_n(x) \rangle$**가 수렴하면, 함수열** $\langle f_n \rangle$**은** D **위에서 점별수렴 (pointwise convergence)한다. 또한 간단히 수렴한다고 한다. 이때, 새로운 함수** $f : D \to \mathbb{R}$**을**

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

로 정의할 때, 이 함수 f를 $\langle f_n \rangle$의 점별극한함수 (pointwise limit function) 또는 간단히 극한함수라고 부른다.

2.6.3 점별수렴할 필요충분조건

실수의 집합 $\mathbb{R}$의 부분집합 D 위에서 정의된 함수열 $\langle f_n \rangle$이 함수 f에 점별수렴할 필요충분조건은 각 점 $x \in D$에 대하여, 임의의 $\epsilon > 0$이 주어졌을 때 이에 대응하는 자연수 $K(x, \epsilon)$가 존재하여

$$n \geq K(x, \epsilon) \implies |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

이 성립하는 것이다.

2.6.4 평등수렴의 정의

실수의 집합 $\mathbb{R}$의 부분집합 D 위에서 정의된 함수열 $\langle f_n \rangle$과 함수 $f : D \to \mathbb{R}$에 대하여, 임의의 $\epsilon > 0$에 대하여 이에 대응하는 자연수 $K(\epsilon)$가 존재하여

$n \geq K(\epsilon)$**인 모든 자연수** n**과 모든** $x \in D$**에 대하여 부등식** $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$

가 성립한다면, $\langle f_n \rangle$은 D 위에서 f에 평등수렴 (uniform convergence)한다고 말한다.

2.6.5 평등수렴하지 않을 필요충분조건

D를 실수의 집합 $\mathbb{R}$의 부분집합이라고 하고 $\langle f_n \rangle$을 D 위에서 정의된 함수열이라고 하자. $\langle f_n \rangle$이 D 위에서 함수 $f : D \to \mathbb{R}$에 평등수렴하지 않을 필요충분조건은 적당한 $\epsilon_0 > 0$에 대하여, $\langle f_n \rangle$의 부분함수열 $\langle f_{n_k} \rangle$와 D에서의 수열 $\langle x_k \rangle$가 존재해서 모든 자연수 k에 대하여

$$|f_{n_k}(x_k) - f(x_k)| \geq \epsilon_0$$

이 성립하는 것이다.

2.6.6 평등수렴할 필요충분조건

D를 실수의 집합 $\mathbb{R}$의 부분집합이라고 하고 $\langle f_n \rangle$을 D 위에서 정의된 함수열이라고 하자. $\langle f_n \rangle$이 D 위에서 함수 $f : D \to \mathbb{R}$에 평등수렴할 필요충분조건은 명제 임의

의 $\epsilon > 0$에 대하여 이에 대응하는 적당한 자연수 $K(\epsilon)$가 존재하여 $n > m \geq K$인 모든 자연수 n, m과 모든 자연수 $x \in D$에 대하여

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$$

이 성립하는 것이다.

2.7 실수계의 체의 공리로부터 임의의 유한개의 실수들의 합이 유일하게 존재함을 알고 있다. 이 절에서는 수열의 극한개념을 이용하여 무한개의 실수들의 합이 존재하는가의 문제에 대해 논한다.

2.7.1 실수의 무한합에서 결합법칙이 성립할 조건 (see also: 2.9.4)

주어진 무한급수가 수렴하면, 그 급수의 항들을 임의의 방법으로 결합하여 만들어진 새로운 급수도 수렴하며 그 합은 원급수의 합과 같다.

2.7.2 급수의 수렴성에 대한 코시 판정법

급수 $\sum a_n$이 수렴할 필요충분조건은 임의의 $\epsilon > 0$에 대하여 이에 대응하는 적당한 자연수 $K = K(\epsilon)$가 존재하여

$$m \geq n \geq K \implies |a_{n+1} + \cdots + a_m| = \left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k \right| < \epsilon$$

이 성립하는 것이다.

2.7.3 급수가 수렴할 경우의 기본 성질

급수 $\sum a_n$이 수렴하면, 반드시

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

이 성립한다.

2.7.4 자연로그 밑 e의 급수 표현

$$e = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!}$$

2.8 급수가 주어졌을 때, 수렴성을 조사할 수 있는 4가지 판정법을 논한다.

2.8.1 비교판정법

두 급수 $\sum a_n$과 $\sum b_n$에 있어서, 적당한 자연수 N_0가 존재하여 $n \geq N_0$인 모든 자연수 n에 대하여

(a) $|b_n| \leq a_n$이고 $\sum a_n$이 수렴한다면, $\sum b_n$도 수렴한다.

(b) $b_n \geq a_n \geq 0$이고 $\sum a_n$이 발산한다면, $\sum b_n$도 발산한다.

2.8.2 제곱근 판정법

제곱근 판정법과 관련된 정리는 다음과 같다.

(1) 급수 $\sum a_n$에 있어서,

(a) 적당한 실수 $0 \leq r < 1$과 적당한 자연수 K가 존재해서 $n \geq K$인 모든 자연수 n에 대하여 $|a_n|^{1/n} \leq r$이면, $\sum a_n$은 수렴한다.

(b) 적당한 실수 $r > 1$과 적당한 자연수 K가 존재해서 $n \geq K$인 모든 자연수 n에 대하여 $|a_n|^{1/n} \geq r$이면, $\sum a_n$은 발산한다.

(2) 급수 $\sum a_n$에 있어서, $\lim \left(|a_n|^{1/n}\right) = r$일 때

(a) $0 \leq r < 1$이면, $\sum a_n$은 수렴하고

(b) $r > 1$이면, $\sum a_n$은 발산한다.

(c) $r = 1$이면, 급수의 수렴성의 판정이 불가능하다.

(3) (2)의 $r = \lim \left(|a_n|^{1/n}\right)$을 $r = \limsup \left(|a_n|^{1/n}\right)$으로 바꾸어 생각하여도 정리의 결과가 모두 성립한다.

2.8.3 비판정법

비판정법과 관련된 정리는 다음과 같다.

(1) 급수 $\sum a_n$에 있어서, 모든 자연수 n에 대하여 $a_n \neq 0$이라고 하자.

(a) 적당한 실수 $0 < r < 1$과 적당한 자연수 K가 존재해서 $n \geq K$인 모든 자연수 n에 대하여 $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq r$이면 $\sum a_n$은 수렴한다.

(b) 적당한 실수 $r > 1$과 적당한 자연수 K가 존재해서 $n \geq K$인 모든 자연수 n에 대하여 $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq r$이면 $\sum a_n$은 발산한다.

(2) 급수 $\sum a_n$에 있어서, $\lim\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = r$일 때

(a) $0 \leq r < 1$이면, $\sum a_n$은 수렴한다.

(b) $r > 1$이면, $\sum a_n$은 발산한다.

(c) $r = 1$이면, 급수의 수렴성의 판정이 불가능하다.

(3) (2)의 $r = \lim\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$을 $r = \limsup\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$으로 바꾸어 생각하여도 정리의 결과가 모두 성립한다.

2.8.4 제곱근 판정법과 비판정법의 관계

제곱근 판정법과 비판정법의 결과는 서로 동일하다. 즉, 급수 $\sum a_n$에 있어서 $\lim\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$이 존재하면 $\lim|a_n|^{1/n}$도 존재하고 그 극한값은 $\lim\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$과 같음이 알려져 있다 (Rudin p.59 참조). 따라서 급수가 비판정법에 의해 수렴하면 그 급수는 또한 제곱근 판정법에 의해서도 수렴한다.

2.8.5 교대급수 판정법

교대급수 $\sum a_n$이 다음의 두 조건

(i) $|a_1| \geq |a_2| \geq |a_3| \geq \cdots \geq 0$

(ii) $\lim a_n = 0$

을 만족하면, 급수 $\sum a_n$은 수렴한다.

2.9 급수의 절대수렴성과 조건수렴성을 정의하고, 절대수렴하는 급수의 매우 중요한 성질을 증명한다.

2.9.1 절대 수렴과 조건 수렴의 정의

급수 $\sum a_n$에 있어서, 급수 $\sum |a_n|$이 수렴하면 $\sum a_n$은 절대 수렴(absolute convergence)한다고 말하고, 급수 $\sum a_n$은 수렴하지만 급수 $\sum |a_n|$이 수렴하지 않으면 $\sum a_n$은 조건 수렴(conditional convergence)한다고 말한다.

2.9.2 $\sum a_n$과 $\sum (a_n)^+$, $\sum (a_n)^-$의 관계 (필요충분조건)

- 급수 $\sum a_n$이 절대 수렴할 필요충분조건은 급수 $\sum (a_n)^+$와 $\sum (a_n)^-$가 모두 수렴하는 것이다. - 급수 $\sum a_n$이 조건 수렴하면, $\sum (a_n)^+$와 $\sum (a_n)^-$가 모두 발산한다.

2.9.3 재배열 급수의 정의

함수 $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$을 전단사 함수라고 하자. 급수 $\sum a_n$에 대하여, 각 자연수 n에 대하여 새로운 급수 $\sum b_n$의 제 n항을 $b_n = a_{f(n)}$으로 정의하였을 때, 급수 $\sum b_n$을 주어진 급수 $\sum a_n$의 재배열 급수(rearrangement of $\sum a_n$)라고 부른다.

2.9.4 실수의 무한 합에서 교환 법칙이 성립할 조건

급수 $\sum a_n$이 절대 수렴하면, $\sum a_n$의 임의의 재배열 급수도 수렴하고, 그 합은 $\sum a_n$의 합과 같다.

2.9.5 조건 수렴하는 급수의 재배열 급수

급수 $\sum a_n$이 절대 수렴하지 않고 조건 수렴하면, $\sum a_n$의 재배열 급수 $\sum b_n$이 수렴한다고 하더라도 그 합은 일반적으로 원급수 $\sum a_n$의 합과 일치하지 않는다. 실제로 $\sum a_n$이 조건 수렴하면 임의로 정한 수에 수렴하는 $\sum a_n$의 재배열 급수를 만들 수 있고, 또한 발산하는 $\sum a_n$의 재배열 급수를 만들 수 있다는 사실이 알려져 있다. (Rudin, p.67 참조)

2.9.6 Cauchy product의 정의

급수 $\sum a_n$과 $\sum b_n$이 주어졌을 때, 각 자연수 n에 대하여

$$c_n = \sum_{i+j=n+1} a_i b_j$$

을 제 n항으로 하는 급수를 얻을 수 있다. 이 급수를 주어진 두 급수의 코시 곱 (Cauchy product)이라고 한다.

2.9.7 Cauchy product의 수렴성

급수 $\sum a_n$이 절대 수렴하고 $\sum a_n = S$, 또한 급수 $\sum b_n$이 수렴하고 $\sum b_n = T$ 라고 하면, $\sum a_n$과 $\sum b_n$의 코시 곱 $\sum c_n$도 수렴하며 $\sum c_n = ST$이다.

2.10 실수열로부터 무한급수를 만들었던 것처럼 함수열로부터 함수항급수를 정의하고, 함수항급수의 점별수렴성과 평등수렴성에 대해 논한다. 함수항급수의 특수한 경우로서 거듭제곱급수의 수렴성도 다룬다.

2.10.1 함수항급수의 정의, 함수항급수의 점별수렴/평등수렴의 개념

f_n을 실수의 집합 $\mathbb{R}$의 부분집합 D 위에서 정의된 함수열이라고 하자. 함수열 $\langle f_n \rangle$의 각 항 f_n을 합(+)의 기호로 연결한 식

$$f_1 + f_2 + \cdots + f_n + \cdots = \sum f_n$$

을 D 위에서 정의된 함수항급수(series of functions defined on D)라 한다.

함수항급수 $\sum f_n$의 부분합의 함수열 $\langle S_n \rangle$이 D 위에서 함수 f에 점별수렴할 때, $\sum f_n$은 D 위에서 f에 점별수렴한다고 말한다. 이때, 함수 f를 $\sum f_n$의 합(sum)이라 부르고 기호는 $f = \sum f_n$으로 나타낸다.

또한, $\langle S_n \rangle$이 D 위에서 함수 f에 평등수렴할 때, $\sum f_n$은 D 위에서 f에 평등수렴한다고 말한다.

2.10.2 코시 판정법

$\sum f_n$을 실수의 집합 $\mathbb{R}$의 부분집합 D 위에서 정의된 함수항급수라고 하자. $\sum f_n$이 D 위에서 평등수렴할 필요충분조건은 임의의 $\epsilon > 0$에 대하여 이에 대응하는 자연수 $K = K(\epsilon)$이 존재하여

$$m \geq n \geq K \quad \text{인 모든 자연수 } m, n\text{과 모든 } x \in D\text{에 대하여}$$

$$\left| \sum_{k=n+1}^{m} f_k(x) \right| < \epsilon$$

이 성립하는 것이다.

2.10.3 Weierstrass M-test

$\langle f_n \rangle$을 실수의 집합 $\mathbb{R}$의 부분집합 D 위에서 정의된 함수열이라 하고, 모든 $x \in D$와 모든 자연수 n에 대하여

$$|f_n(x)| \leq M_n$$

을 만족하는 수열 $\langle M_n \rangle$이 존재한다고 하자. 이때, 급수

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_n$$

이 수렴하면 함수항급수 $\sum f_n$은 D 위에서 평등수렴한다.

2.10.4 수렴반경, 수렴구간

거듭제곱급수 $\sum a_n x^n$에 있어서

$$\alpha = \limsup_{n \to \infty} |a_n|^{1/n}, \quad R = \frac{1}{\alpha}$$

이라고 놓자. 여기서, $\alpha = 0$이면 $R = \infty$로, $\alpha = \infty$이면 $R = 0$으로 정의하기로 한다. 이때, R을 거듭제곱급수 $\sum a_n x^n$의 수렴반경(radius of convergence)이라 하고, 구간 $(-R, R)$을 수렴구간(interval of convergence)이라고 한다.

2.10.5 수렴성 조건

거듭제곱급수 $\sum a_n x^n$이

(a) 점 $x = x_1$에서 수렴하면, $\sum a_n x^n$은 $|x| < |x_1|$인 모든 점 $x \in \mathbb{R}$에서 절대 수렴하고

(b) 점 $x = x_2$에서 발산하면, $\sum a_n x^n$은 $|x| > |x_2|$인 모든 점 $x \in \mathbb{R}$에서 발산 한다.

2.10.6 수렴반경에 따른 수렴성

거듭제곱급수 $\sum a_n x^n$의 수렴반경을 $R > 0$ (혹은 $R = \infty$일 경우도 포함)이라고 하자.

(a) $\sum a_n x^n$은 임의의 점 $x \in (-R, R)$에서 절대수렴한다.

(b) $\sum a_n x^n$은 임의의 유계 폐구간 $[a, b] \subset (-R, R)$ 위에서 평등수렴한다.

3 연속함수

해석학에서 다루는 함수 중에서 가장 중요한 연속함수에 대해 다룬다. 함수의 연속성은 1장에서 논한 실직선의 위상개념과 이 장에서 논하게 될 함수에 대한 극한의 개념을 토대로 해서 설명되는 개념이다.

(flow) 극한의 개념, 기본성질, 함수의 연속성/ 컴팩트집합 위에서 정의된 연속함수의 중요한 성질/ 함수의 평등연속성의 정의, 연속성과의 차이점과 서로의 관계/ 단조함수에 관한 성질과 함수의 불연속성과의 관련/ 연속함수열이 점별수렴 및 평등수렴할 때 극한함수의 연속성/ 연속함수를 보다 초등적 함수인 다항함수로 근사시킬 수 있는가

3.1 정의역이 $\mathbb{R}$의 부분집합인 함수의 극한에 대해 논한다. 2장에서 다룬 수열의 극한은 정의역이 $\mathbb{N}$인 함수로 3장의 특수한 경우이다.

3.1.1 함수의 극한의 정의

E를 실수의 집합 $\mathbb{R}$의 부분집합이라 하고, 한 실수 a를 E의 집적점이라고 하자. 함수 $f : E \to \mathbb{R}$에 있어서, 적당한 실수 L이 존재해서 임의의 $\epsilon > 0$에 대하여

이에 대응하는 적당한 $\delta > 0$이 존재하여

$$0 < |x-a| < \delta, x \in E \quad \textbf{이면} \quad |f(x) - L| < \epsilon$$

를 만족하면,

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

로 나타낸다.

3.1.2 함수의 극한의 유일성

실수 a가 $E \subset \mathbb{R}$의 집적점일 때, 함수 $f : E \to \mathbb{R}$에 있어서 $\lim_{x\to a} f(x)$가 존재하면 그 극한값은 유일하다.

3.1.3 함수의 극한과 동치인 명제

E를 실수의 집합 $\mathbb{R}$의 부분집합이라 하고 실수 a를 E의 집적점이라고 하자. 함수 $f : E \to \mathbb{R}$와 실수 L에 대하여 다음의 명제들은 동치이다 (TFAE).

(a) $\lim_{x\to a} f(x) = L$

(b) **점 a에 수렴하는 E에서의 임의의 수열 $\langle x_n \rangle$ (단, $x_n \neq a$)에 대하여 $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = L$이다.**

(c) **L을 포함하는 임의의 개집합 V에 대하여, 이에 대응하는 a를 포함하는 적당한 개집합 U가 존재하여**

$$x \in U \cap E, x \neq a \quad \textbf{이면} \quad f(x) \in V$$

이다.

3.2 함수의 연속성을 ϵ-δ 방법 이외에도 <함수의 극한 개념 + 근방 개념>을 이용해 정의할 수 있다. 또한 1장에서 소개한 개집합/폐집합 개념을 이용해 함수의 연속성과 동치인 명제를 알아본다.

3.2.1 함수의 연속의 정의

E를 실수의 집합 $\mathbb{R}$의 부분집합이라 하고, 실수 c를 $c \in E$라고 하자. 함수 $f: E \to \mathbb{R}$에 있어서 임의의 $\epsilon > 0$에 대하여 이에 대응하는 적당한 $\delta = \delta(\epsilon) > 0$이 존재하여

$$|x - c| < \delta \quad \textbf{이고,} \quad x \in E \quad \textbf{이면} \quad |f(x) - f(c)| < \epsilon$$

를 만족하면, 함수 f는 점 $x = c$에서 연속이라고 한다.

3.2.2 연속일 필요충분 조건은 lim과 f가 교환가능한 것이다.

$$\lim_{x \to c} f(x) = f\left(\lim_{x \to c} x\right)$$

특히 집적점인 경우의 고려가 의미 있는 고려 대상이다. (왜냐하면 고립점인 경우 자명하게 연속이 되기 때문이다.)

3.2.3 함수의 연속과 동치인 명제

집합 E를 실수의 집합 $\mathbb{R}$의 부분집합이라 하고, $c \in E$라고 하자. 함수 $f: E \to \mathbb{R}$에 있어 TFAE.

(a) **f는 $x = c$에서 연속이다.**

(b) **점 c에 수렴하는 E에서의 임의의 수열 $\langle x_n \rangle$에 대응한 수열 $\langle f(x_n) \rangle$은 언제나 $f(c)$에 수렴한다.**

(c) **$f(c)$를 포함하는 임의의 개집합 V에 대하여, 이에 대응하는 c를 품는 적당한 개집합 U가 존재하여**

$$x \in E \cap U \quad \textbf{이면} \quad f(x) \in V$$

이다.

3.2.4 $\mathbb{R}$에서의 함수의 연속성과 동치인 두 명제 (TFAE)

함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$에 있어서 다음 명제들은 서로 동치이다.

(a) **f는 $\mathbb{R}$ 위에서 연속이다.**

(b) **$\mathbb{R}$에서의 임의의 개집합 G에 대하여 역상 $f^{-1}(G)$가 개집합이다.**

(c) **$\mathbb{R}$에서의 임의의 폐집합 F에 대하여 역상 $f^{-1}(F)$가 폐집합이다.**

3.3 $\mathbb{R}$의 부분집합에서 정의된 연속함수 전체의 집합에도 2장의 수열공간에서와 같은 대수적 구조(벡터공간)가 형성되어 있음을 보인다.

3.3.1 (실수의 부분집합 E 위에서 정의된) 연속함수들의 집합은 벡터 공간이다

3.3.2 연속함수들의 합성함수는 연속함수이다.

3.4 컴팩트 집합 위에서 정의된 연속함수는 해석학에서 매우 중요한 성질들(3개의 정리들)을 가지고 있음을 보인다. 또한 유계폐구간에서 정의된 함수에 관한 3가지 정리를 소개한다.

3.4.1 - 3.4.3 연속함수의 세 가지 성질(정리들)

(1) **K가 실수의 집합 $\mathbb{R}$의 컴팩트 부분집합일 때, 함수 $f : K \to \mathbb{R}$가 $f \in C(K)$이면 f는 K 위에서 유계이다.**

(cpt–연속함수–>유계)

(2) **K가 실수의 집합 $\mathbb{R}$의 컴팩트 부분집합일 때, 함수 $f : K \to \mathbb{R}$가 $f \in C(K)$이면 f는 K 위에서 최댓값과 최솟값을 갖는다. 즉,**

$$f(x^*) = \sup\{f(x) : x \in K\}, \quad f(x_*) = \inf\{f(x) : x \in K\}$$

가 되는 점 $x^* \in K$와 $x_* \in K$가 각각 존재한다.

(cpt–연속함수–>min/max)

(3) **K가 실수의 집합 $\mathbb{R}$의 컴팩트 부분집합일 때, 함수 $f : K \to \mathbb{R}$가 $f \in C(K)$ 이면 $f(K)$는 컴팩트 집합이다.**

(cpt–연속함수–>cpt)

3.4.4 중간값 정리

함수 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$가 폐구간 $[a, b]$에서 연속이고 또한 $f(a) < f(b)$이면, $f(a) < m < f(b)$인 임의의 실수 m에 대하여, $f(c) = m$을 만족시키는 점 c가 개구간 (a, b)에 존재한다.

3.4.5

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$가 폐구간 $[a, b]$에서 연속이고 상수함수가 아니면 f의 치역 $f([a, b])$는 폐구간이다.

3.4.6

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$가 폐구간 $[a, b]$에서 연속이고 증가[감소]하면, f의 역함수 $f^{-1} : f([a, b]) \to \mathbb{R}$가 존재하여 f^{-1}은 $f([a, b])$ 위에서 연속이고 증가[감소]한다.

3.5 함수의 평등연속성을 정의, 연속성과의 차이점 및 관계, 평등연속함수의 성질들을 다룬다.

3.5.1 평등연속의 정의

E가 실수의 집합 $\mathbb{R}$의 부분집합이고 함수 $f : E \to \mathbb{R}$이 임의의 $\epsilon > 0$에 대하여, 이에 대응하는 적당한 $\delta = \delta(\epsilon) > 0$이 존재하여

$$|x - y| < \delta, \quad x, y \in E \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

를 만족하면, f는 E 위에서 평등연속(uniformly continuous on E)이라고 한다.

3.5.2 cpt -(conti)–>(uniform conti)

K가 실수의 집합 $\mathbb{R}$의 컴팩트 부분집합일 때, 함수 $f : K \to \mathbb{R}$가 연속이면 f는 K 위에서 평등연속이다.

3.5.3 cauchy -(uniform conti)–>cauchy [수열의 코시성은 평등연속 함수에 의해 보존되는 성질이다]

E가 실수의 집합 $\mathbb{R}$의 부분집합이고, 함수 $f : E \to \mathbb{R}$가 평등연속이라고 하자. $\langle x_n \rangle$이 E에서의 임의의 코시 수열이면, 수열 $\langle x_n \rangle$에 대응한 수열 $\langle f(x_n) \rangle$도 코시 수열이다.

3.6 구간 위에서 정의된 단조함수의 불연속점들의 집합은 가산임을 보인다.

3.6.1 좌극한/우극한의 정의

E를 실수의 집합 $\mathbb{R}$의 부분집합이라 하고, 실수 c를 E의 집적점이라고 하자. 함수 $f : E \to \mathbb{R}$에 있어서, 적당한 실수 L이 존재하여 임의의 $\epsilon > 0$에 대하여 이에 대응하는 적당한 $\delta > 0$이 존재해서

(i) $(c, c+\delta) \cap E \neq \emptyset$ $[(c-\delta, c) \cap E \neq \emptyset]$

(ii) $c < x < c+\delta$, $x \in E$ $[c-\delta < x < c$, $x \in E]$**이면 반드시** $|f(x) - L| < \epsilon$

를 만족하면, 실수 L을 점 c에서의 f의 우극한값[좌극한값]이라고 한다.

3.6.2 함수의 우극한과 동치인 명제

E를 실수의 집합 $\mathbb{R}$의 부분집합이라 하고, 실수 c를 E의 집적점이라고 하자. 함수 $f : E \to \mathbb{R}$에 있어서 TFAE:

(a) $\lim_{x \to c^+} f(x) = f(c^+)$

(b) **점 c에 수렴하는 E에서의 임의의 수열 $\langle x_n \rangle$ (단, $x_n > c$, $n \in \mathbb{N}$)에 대하여 수열 $\langle f(x_n) \rangle$은 $f(c^+)$로 수렴한다.**

3.6.3 불연속점의 종류

함수 $f : (a, b) \to \mathbb{R}$가 점 $x \in (a, b)$에서 불연속이라고 할 때, $f(x^+)$와 $f(x^-)$가 각각 존재하면, 점 x를 f의 제1종 불연속점(the discontinuous point of the first kind)이라 하고 한편, $f(x^+)$ 또는 $f(x^-)$가 존재하지 않으면 점 x를 f의 제2종 불연속점(the discontinuous point of the second kind)이라고 한다.

3.6.4 함수의 불연속점 집합의 크기

$(a, b) \xrightarrow{\textbf{monotone}} \mathbb{R}$**: f의 불연속점 집합은 가산 집합이다.**

3.7 연속함수열의 수렴 정도에 따른 극한함수의 연속성

3.7.1 $\{f_n\}$의 연속성과 평등수렴

- **$\{f_n\}$이 연속 함수열이고 $f_n \to f$ (평등수렴)이라면, f는 연속이다.**
- **즉, 극한 연산 $\lim_{x\to c}$와 $\lim_{n\to\infty}$를 교환할 수 있다.**
- **연속함수공간은 점별수렴에 대해 닫혀있지 않지만, 평등수렴에 대해서는 닫혀 있다. (cf. 4.6.2)**

3.7.2 거듭제곱급수와 그 성질

- **거듭제곱급수 $\sum a_n x^n$이 수렴구간 $(-R, R)$ $(R > 0)$ 위에서 함수 f에 수렴하면, f는 $(-R, R)$ 위에서 연속이다.**

3.8 해석학에서 다루는 중요한 문제 중의 하나는 주어진 함수를 보다 다루기 쉬운 초등함수로 근사시킬 수 있는가 하는 문제이다.

3.8.1 평등근사의 개념

- **E를 실수 집합 $\mathbb{R}$의 부분집합이라 하고, $\mathcal{F}$를 함수 $g : E \to \mathbb{R}$들로 이루어진 한 집합이라고 하자.**

- **함수 $f : E \to \mathbb{R}$에 대하여, 임의의 $\epsilon > 0$에 대해 적당한 $g_\epsilon \in \mathcal{F}$가 존재하여 모든 $x \in E$에 대하여**

$$|f(x) - g_\epsilon(x)| < \epsilon$$

을 만족하면, 함수 f를 E 위에서 $\mathcal{F}$에 속하는 함수로서 평등근사(uniform approximation) 시킬 수 있다고 한다.

3.8.2 계단함수의 정의

- **함수 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$가 $[a,b]$의 적당한 분할 $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$과 실수 $w_1, w_2, \ldots, w_n$이 존재하여**

$$f(x) = w_i, \quad x_{i-1} < x < x_i$$

를 만족하면, f를 $[a,b]$ 위에서 정의된 계단함수(step function)라고 한다.

3.8.3 Weierstrass 근사 정리

- **함수 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$가 연속이면, f를 $[a,b]$ 위에서 다항함수로 평등근사시킬 수 있다.**

4 미분가능 함수

함수의 미분가능성, 평균값 정리, 로피탈법칙, 테일러 정리, 거듭제곱급수 전개, 극한함수의 미분가능성

4.1 함수의 극한의 개념은 집적점에서 출발한다.

4.1.1 미분가능의 정의; 미분가능성은 국소적(local) 성질

- **함수 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$에 대해, 점 $c \in [a,b]$에 대해 적당한 $L \in \mathbb{R}$이 존재하여,**

- **임의의 $\epsilon > 0$에 대해, 적당한 $\delta > 0$이 존재하여**

$$0 < |x - c| < \delta, \quad x \in [a,b] \Rightarrow \left| \frac{f(x) - f(c)}{x - c} - L \right| < \epsilon$$

- **를 만족하면 f는 점 $x = c$에서 미분가능하다고 한다.**

4.1.2 미분가능성의 정의역 확장

- **함수의 미분가능성은 정의역이 구간이 아닌 경우에도 집적점이면 정의할 수 있다.**

4.1.3 미분가능하면 연속이다

- **함수가 어떤 점에서 미분가능하면, 해당 점에서 연속이다.**

4.1.4 미분가능함수의 도함수와 점별수렴

- **미분가능한 함수의 도함수는 적당한 연속함수열의 점별수렴 극한함수이다.**
- **구체적으로,**

  $$g_n(x) = n\{f(x + \frac{1}{n}) - f(x)\}$$

  로 둘 수 있다.

4.1.5 미분가능할 필요충분조건

- **적당한 실수** L**과 함수** $n_f : [a, b] \setminus \{c\} \to \mathbb{R}$**가 존재하여**

  $$\lim_{x \to c} n_f(x) = 0$$

- **모든** $x \in [a, b] \setminus \{c\}$**에 대해**

  $$f(x) = f(c) + L(x - c) + n_f(x)(x - c)$$

- **를 만족하는 것이 필요충분조건이다. 이때,** $L = f'(c)$**이다.**

4.1.6 미분계수가 양수일 때 증가성

- **함수** $f : [a, b] \to \mathbb{R}$**가 점** $c \in [a, b]$**에서 미분가능하며** $f'(c) > 0$**이라고 하자.**
- **그러면 적당한** $\delta > 0$**가 존재하여 모든** $x_1, x_2 \in [a, b]$**가** $|x_i - c| < \delta$**를 만족할 때,**

  $$x_1 < c < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(c) < f(x_2)$$

- **그러나, 이는 점 근방의 특정 구간 전체에서 증가함을 의미하는 것은 아니다.**

4.2 구간 위에서 정의된 미분가능한 함수들의 집합은 벡터공간이다. (연속함수 공간은 실수의 부분집합에 대한 것이었으나 미분가능 함수공간은 구간에 대한 것임을 알자)

4.3 평균값 정리, 그로부터 유도되는 미분가능함수에 대한 성질들

4.3.1 코시의 평균값 정리 (general)

- **함수** $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$**가** $[a, b]$**에서 연속이고** (a, b)**에서 미분가능하면 다음을 만족시키는 점** $x_0 \in (a, b)$**가 존재한다.**

- $$(f(b) - f(a))g'(x_0) = (g(b) - g(a))f'(x_0)$$

4.3.2 미분계수가 항등적으로 0인 구간에서 상수함수이다.

4.3.3 Lipschitz 조건

- **함수** $f : [a, b] \to \mathbb{R}$**가 다음을 만족할 때** f**는 립시츠(Lipschitz) 조건을 만족한다고 한다.**

- **모든** $x_1, x_2 \in [a, b]$**에 대하여**

- $$|f(x_1) - f(x_2)| \leq K|x_1 - x_2|$$

  을 만족시키는 적당한 양의 실수 K**가 존재한다.**

4.3.4 Darboux 정리

- **함수** $f : [a, b] \to \mathbb{R}$**가** $[a, b]$**에서 미분가능하고** $f'(a) \neq f'(b)$**이면,**

- $f'(a)$**와** $f'(b)$ **사이의 임의의 값** k**에 대하여** $f'(x_0) = k$**를 만족시키는 점** $x_0 \in (a, b)$**가 존재한다.**

4.4 4.4.1 로피탈 법칙 (0/0꼴, ∞/∞꼴 for 닫힌구간, 비유계 폐구간)

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

4.5 다항함수는 임의의 실수에 대응되는 함숫값을 쉽게 얻을 수 있는 장점을 가진 초등함수이다. 이러한 이유에서 다항함수는 어떤 다른 함수의 근사함수로 많이 이용되고 있는 것이다. 다항함수로의 근사가 가능한 함수를 해석함수라 부르며, 테일러 급수를 통해 근사가 이루어진다.

4.5.1 C^n급 함수, C^∞급 함수

함수 f가 n차 도함수 $f^{(n)}$을 가지며, $f^{(n)}$이 연속이면 f를 C^n급 함수(function of class C^n)라고 한다. 모든 자연수 n에 대하여 $f^{(n)}$이 미분가능하면, f를 C^∞급 함수(function of class C^∞)라고 한다. 또한, 미분가능성은 일반적으로 구간에서 정의되며, 예를 들어 구간 $[a,b]$에서의 n급 함수들의 모임을 $C^n[a,b]$로 나타낸다.

C^n급 함수와 C^∞급 함수의 공간은 벡터 공간이다.

4.5.2 해석적 함수(analytic function)의 정의 (taylor series)

구간 $I \subset \mathbb{R}$에서 함수 $f : I \to \mathbb{R}$가 $f \in C^\infty(I)$이며, $a \in I$라고 하자. 모든 $x \in I$에 대하여, 급수

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

를 f의 구간 I에서의 테일러 급수라고 한다.

구간 I에서 함수 f가 해석적 함수(analytic function)임은 $f \in C^\infty(I)$이고, 점 $a \in I$에서의 테일러 급수가 I 위에서 f에 수렴하는 것이다.

4.6 다음의 두 질문을 고려하자: (1)구간에서 정의된 미분가능함수열의 극한함수 f의 미분가능성? (2)극한함수 f가 미분가능하면 도함수열의 극한함수는 f'인가?

4.6.1 미분가능함수공간의 닫힘성

미분가능 함수공간은 점별수렴이나 평등수렴에 대해 닫혀 있지 않다.

4.6.2 도함수열의 평등수렴과 수렴성

어떤 점에 대해 함수열이 수렴하고, 도함수열이 어떤 함수에 평등수렴할 때 두 조건을 만족한다. (참고: 3.7.1 연속함수공간은 평등수렴에 대해 닫혀 있다.)

구간 $[a, b]$ 위에서 정의된 미분가능 함수열 $\{f_n\}$이 다음 조건을 만족한다고 하자.

(i) **어떤 점 $x_0 \in [a, b]$에 대해 $\{f_n(x_0)\}$가 수렴한다.**

(ii) **함수열 $\{f'_n\}$이 $[a, b]$ 위에서 어떤 함수에 평등수렴한다.**

그렇다면 다음이 성립한다.

(a) **$\{f_n\}$은 $[a, b]$ 위에서 어떤 함수 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$에 평등수렴한다.**

(b) **$f \in \mathcal{D}[a, b]$이며, 모든 점 $x \in [a, b]$에서 $\lim_{n\to\infty} f'_n(x) = f'(x)$이다.**

요약: 위 정리에서 극한 기호($\lim_{n\to\infty}$)와 도함수 기호($\frac{d}{dx}$)는 서로 교환 가능하다.

5 적분가능 함수

리만 적분의 정의에 있어서 중요한 점은 실직선의 순서구조에 그 기반을 두고 있다는 것이다. 리만 적분의 정의 3가지, 미적분학 기본정리, 특이적분, 적분가능 함수열

5.1 리만적분의 정의(1)

함수 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$가 유계라고 하자. $[a, b]$의 임의의 분할 $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$에 대하여 P의 각 소구간 I_k에서

$$M(f, I_k) = \sup\{f(x) : x \in I_k\}, \quad m(f, I_k) = \inf\{f(x) : x \in I_k\}$$

라고 놓을 때, 다음과 같이 정의된 두 실수

$$U(f, P) = \sum_{k=1}^{n} M(f, I_k)\Delta x_k, \quad L(f, P) = \sum_{k=1}^{n} m(f, I_k)\Delta x_k$$

를 각각 분할 P에 대한 f의 리만 상합(upper Riemann sum), 리만 하합(lower Riemann sum)이라고 한다.

$\mathbb{R}$의 완비성 공리에 의하여 두 실수

$$\sup\{L(f, P) : P \in \mathcal{P}[a, b]\}, \quad \inf\{U(f, P) : P \in \mathcal{P}[a, b]\}$$

는 항상 존재한다. 이들의 값을 각각 f의 리만 하적분(lower Riemann integral), 리만 상적분(upper Riemann integral)이라고 한다.

특징: 유계폐구간에서 정의된 유계함수를 전제로 리만 상합/리만 하합을 이용

5.2.1 리만적분가능성 테스트

함수 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$가 유계라고 하자. f가 $[a, b]$ 위에서 R-적분 가능할 필요충분조건은 임의의 $\epsilon > 0$에 대하여, 이에 대응하는 적당한 $[a, b]$의 분할 P_ϵ이 존재해서 다음이 성립하는 것이다:

$$U(f, P_\epsilon) - L(f, P_\epsilon) < \epsilon$$

5.2.2 유계 폐구간에서 정의된 연속함수 / 단조함수는 리만적분가능하다

5.2.3 리만적분의 정의(2)

함수 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$가 유계일 때, 임의의 점 $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$에 대하여, 합

$$R(f, P) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta x_k$$

를 $[a, b]$의 분할 P에 대한 f의 리만 합(Riemann sum)이라고 한다.

또 적당한 실수 I가 존재하여 임의의 $\epsilon > 0$에 대하여 이에 대응하는 적당한 $\delta > 0$가 존재해서 $\|P\| < \delta$인 모든 분할 P에 대하여

$$|R(f, P) - I| < \epsilon$$

을 만족하면, I를 $\|P\| \to 0$일 때의 리만 합의 극한이라고 하고, 이를 f의 구간 $[a, b]$에서의 리만적분으로 정의한다.

특징: 리만합의 극한으로 정의.

5.2.4 $\mu(D) = 0$의 정의

A를 실수의 집합 $\mathbb{R}$의 부분집합이라고 하자. 임의의 $\epsilon > 0$에 대하여 가산개의 소구간 (a_n, b_n)이 존재하여

- $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n)$
- $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n - a_n) < \epsilon$

을 만족할 때, 집합 A를 측도 0인 집합이라고 한다.

5.2.5 리만적분의 정의(3)

함수 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$가 유계함수라 하자. 함수 f가 리만 적분가능할 필요충분조건은 f의 불연속점의 집합 D가 측도 0인 집합인 것이다.

특징: $\mu(D) = 0$

5.3.1 구간에서 정의된 적분가능 함수 공간은 벡터공간이다

5.3.2 절댓값 적분 부등식

절댓값 적분 부등식은 삼각부등식의 일반화로 볼 수 있으며 이용도가 매우 높다.
(cf. 2.4.2: 역은 성립하지 않다.)
함수 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$가 적분 가능하면

- f^+, f^-도 적분 가능하고
- $|f|$도 적분 가능하며, 또한 다음이 성립한다:

$$\left| \int_a^b f\,dx \right| \leq \int_a^b |f|\,dx$$

5.3.3 구간에서의 적분은 one-form[linear form]이다

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$$

$$\int_a^b (\lambda f) = \lambda \int_a^b f, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

5.3.4 적분가능 함수의 곱함수도 적분 가능하다

함수 $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$이면 f와 g의 곱함수 fg도 적분 가능하다.

5.4 리만적분과 도함수 사이의 관계를 설명하여 주는 미적분학의 기본정리

5.4.1 미적분학의 기본정리 Type 1

함수 $f \in \mathcal{R}[a,b]$에 대해 함수 $F : [a,b] \to \mathbb{R}$을

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

로 정의하면, F는 다음의 성질을 갖는다:

- **(a)** F는 $[a,b]$ 위에서 평등 연속이다.
- **(b)** f가 $x_0 \in [a,b]$에서 연속이면, F는 점 x_0에서 미분 가능하고 $F'(x_0) = f(x_0)$이다.

5.4.2 미적분학의 기본정리 Type 2

함수 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$가 적분 가능하고, 또한 적당한 함수 $F : [a,b] \to \mathbb{R}$가 존재하여 F가 $[a,b]$ 위에서 미분 가능하고 $F' = f$이면, 다음이 성립한다:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

5.4.3 평균값 정리 (적분 VER)

함수 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$가 연속이면, 다음을 만족시키는 점 $x_0 \in (a, b)$가 존재한다:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f\,dx = f(x_0)$$

5.5.1 특이적분 개념 (4가지 유형) - 유계 폐구간 domain 조건, 유계 함수 조건을 만족하지 않는 함수의 적분

1. **함수 $f : (a, b] \to \mathbb{R}$가 임의의 $c \in (a, b]$에 대하여, 구간 $[c, b]$ 위에서 R-적분 가능할 때, 극한**
$$\lim_{c \to a^+}\int_c^b f\,dx$$
가 존재하면 f는 $(a, b]$ 위에서 특이적분 가능하다고 한다.

2. **$c \in (a, b)$이고 $E = [a, b] \setminus \{c\}$일 때, 함수 $f : E \to \mathbb{R}$가 구간 $[a, c)$와 $(c, b]$ 위에서 각각 특이적분 가능하면, f는 $[a, b]$ 위에서 특이적분 가능하다고 하고, 극한값**
$$\int_a^b f\,dx = \lim_{\epsilon \to 0^+}\int_a^{c-\epsilon} f\,dx + \lim_{\delta \to 0^+}\int_{c+\delta}^b f\,dx$$
를 $[a, b]$ 위에서의 f의 특이적분이라고 한다.

3. **함수 $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$가 임의의 $b \in (a, \infty)$에 대해서 구간 $[a, b]$ 위에서 R-적분 가능할 때, 극한**
$$\lim_{b \to \infty}\int_a^b f\,dx$$
가 존재하면 f는 $[a, \infty)$ 위에서 특이적분 가능하다고 말한다.

4. **$f : (-\infty, \infty) \to \mathbb{R}$가 임의의 $a \in (-\infty, \infty)$에 대하여 $[a, \infty)$와 $(-\infty, a]$ 위에서 각각 특이적분 가능할 때, f는 $(-\infty, \infty)$ 위에서 특이적분 가능하다고 말한다.**

5.5.2 $[a, \infty)$에서의 비교 판정법, 극한 비교 판정법

1. **함수 $f, g \in \mathcal{R}[a, \infty)$가 모든 $x \in [a, \infty)$에 대하여 $0 \le f \le g$라고 하자. $[a, \infty)$ 위에서의 g의 무한 적분이 존재하면, $[a, \infty)$ 위에서의 f의 무한 적**

분도 존재하며, 다음이 성립한다:

$$0 \le \int_a^\infty f\,dx \le \int_a^\infty g\,dx$$

2. **함수** $f, g \in \mathcal{R}[a, \infty)$**가 모든** $x \in [a, \infty)$**에 대하여** $0 \le f \le g$**라고 하자. 임의의** $c \in (a, \infty)$**에 대하여** f, g**가** $[a, c]$ **위에서** R**-적분 가능하고, 또한**

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \ne 0$$

이면, f**와** g**의 무한 적분의 존재성은 서로 동치이다.**

5.5.3 $[a, \infty)$에서의 절대 수렴

함수 $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$**가 임의의** $c \in (a, \infty)$**에 대하여 구간** $[a, c]$ **위에서** R**-적분 가능하고, 무한 적분**

$$\int_a^\infty |f|\,dx$$

가 존재할 때, f**의 무한 적분**

$$\int_a^\infty f\,dx$$

가 절대 수렴(absolutely convergent)한다고 말한다.

5.5.4 $[a, \infty)$의 특이적분에서의 절댓값 적분 부등식: cf. 5.3.2

함수 $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$**가** $[a, \infty)$ **위에서 절대 적분 가능하면,** $[a, \infty)$ **위에서의** f**의 무한 적분** $\int_a^\infty f\,dx$**가 존재하고, 다음이 성립한다:**

$$\left|\int_a^\infty f\,dx\right| \le \int_a^\infty |f|\,dx$$

5.6 다음의 두 질문을 고려하자: (1)구간에서 정의된 적분가능함수열의 극한함수 f의 적분가능성? (2)극한함수 f가 적분가능하면 극한기호와 적분기호는 교환가능한가?

5.6.1 평등 수렴하면 두 질문이 성립한다.

5.6.2 theorem

함수 $f : [0,1] \to \mathbb{R}$**가 연속이고 모든** $n = 0,1,2,\ldots$**에 대하여**

$$\int_0^1 f(x)x^n\,dx = 0$$

이면, 구간 $[0,1]$ **위에서** $f \equiv 0$**이다.**

5.6.3

1. **두 질문이 성립한다고 해서 평등 수렴하지는 않는다. (역은 성립하지 않는다.)**

2. **점별 수렴하는 경우, 두 질문이 성립하지 않는다.**
   즉, 유계 폐구간 상 적분 가능 함수 공간은 점별 수렴에 관해서는 닫혀 있지 않지만 평등 수렴에 관해서는 닫혀 있다.

3. $[a,\infty)$**에서 정의된 함수의 경우, 평등 수렴하여도 두 질문을 만족하지 않는다.**